



Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

CORRENTI A PELO LIBERO



Definizioni e ipotesi di base

► Corrente a superficie libera (o a pelo libero)

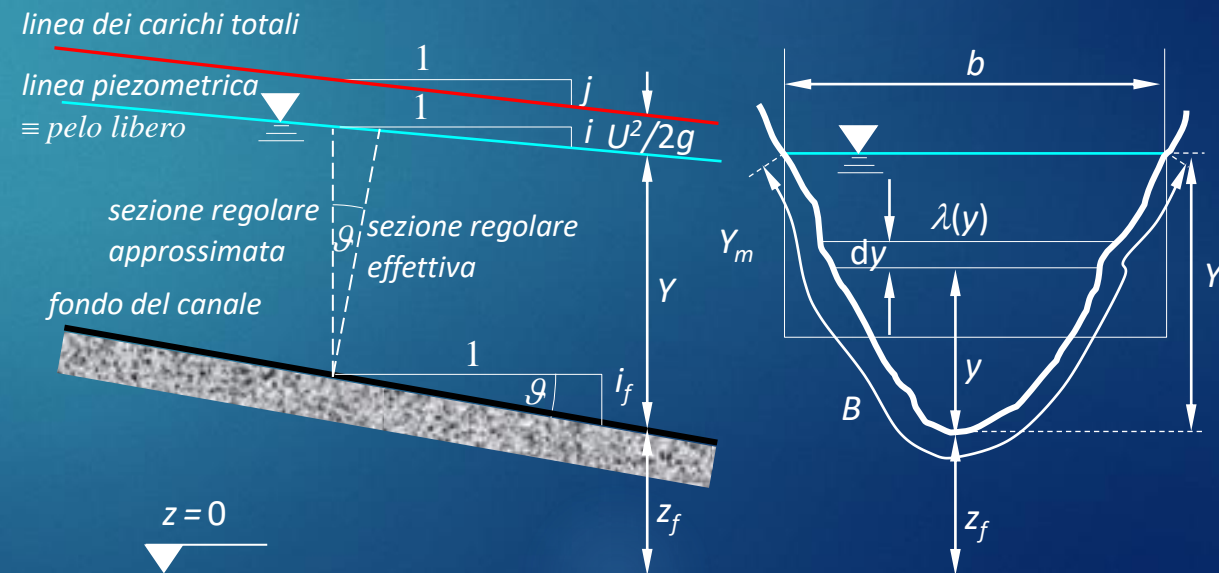
presenta parte della superficie di contorno a contatto con l'atmosfera, sulla quale si ha pertanto $p=0$

► Ipotesi della teoria delle correnti a pelo libero

- liquido a densità costante ($\rho = \text{cost}$)
- corrente gradualmente variata \longrightarrow sezioni regolari con distribuzione di pressione idrostatica
- piccola pendenza del fondo (piccolo angolo ϑ fra profilo del fondo dell'alveo e l'orizzontale)
 - ✓ $\cos \vartheta \cong 1 \longrightarrow$ sezioni regolari \approx verticali
 - ✓ Linea piezometrica \equiv profilo del pelo libero
- profilo trasversale del pelo libero orizzontale
- $\alpha \cong 1$ (coefficiente ragguaglio potenze cinetiche)

► Definizioni

- Profondità della corrente Y : differenza fra quota del pelo libero e quota z_f del fondo (punto più depresso della sezione dell'alveo)
- asse della corrente: profilo del fondo





Moto uniforme

► Condizione necessaria per l'esistenza del moto uniforme

Alveo cilindrico (o prismatico): superficie dell'alveo generata dalla traslazione del profilo della sezione

- ✓ In caso contrario le particelle non potrebbero muoversi tutte di moto rettilineo uniforme
- ✓ Le traiettorie rettilinee devono essere fra loro parallele

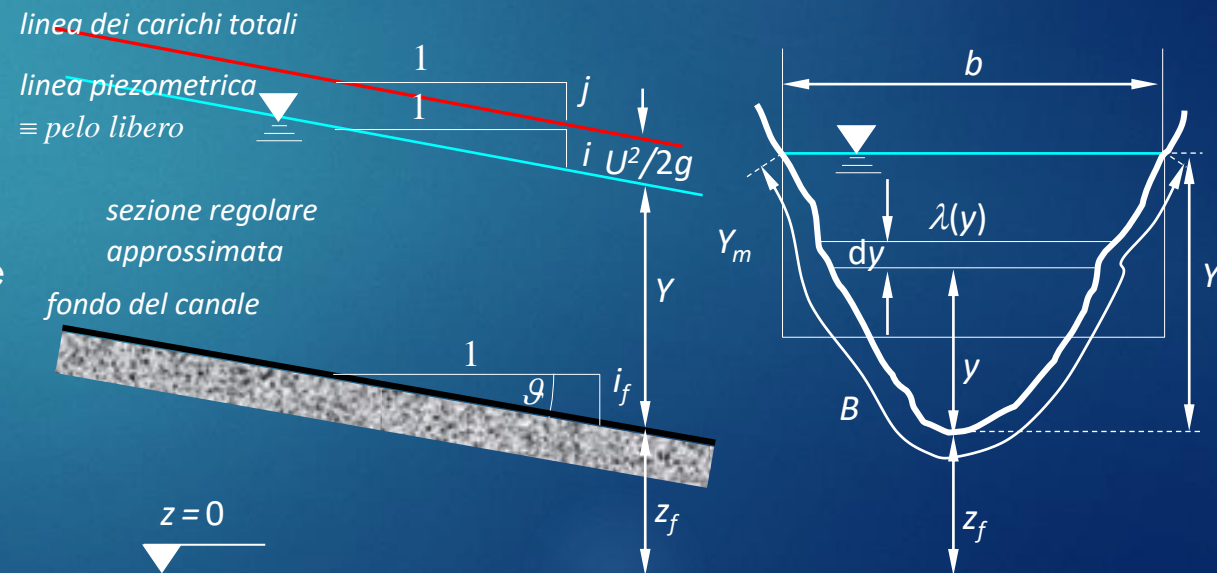
► Caratteristiche cinematiche e geometriche del moto uniforme nelle correnti a pelo libero

- Traiettorie rettilinee e parallele \Rightarrow profilo del pelo libero parallelo al fondo:

$$i = i_f = - \frac{\partial z_f}{\partial s}$$

- ✓ pendenza del fondo $i_f > 0$ per alveo declive
- Il moto uniforme è stazionario $\Rightarrow Q = \text{cost}$
- $i = i_f \Rightarrow$ sezioni liquide Ω costanti lungo l'asse
 \Rightarrow velocità media della corrente U costante lungo l'asse
 \Rightarrow linea dei carichi totali parallela al profilo del pelo libero e al profilo del fondo

$$j = i = i_f$$





Moto uniforme

► Equazione di Chezy per il moto uniforme

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} = i_f \longrightarrow \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} = \frac{Q^2}{\chi^2 \mathfrak{R} \Omega^2} = i_f \longrightarrow Q = \chi \Omega \sqrt{\mathfrak{R} i_f} \quad ; \quad \chi \Omega \sqrt{\mathfrak{R}} = F(Y) \longrightarrow Q = Q(Y)$$

- ✓ Uso formula di Chezy giustificato da elevati valori del numero di Reynolds (moto assolutamente turbolento)
- ✓ Disponibili espressioni della cadente j del tipo Darcy-Weisbach per alvei di varia forma (poco utilizzate)

► Scala delle portate di moto uniforme

- Legame funzionale fra portate e profondità di moto uniforme (e relativa rappresentazione grafica)
- Esempio: sezione rettangolare di larghezza b (scabrezza di Strickler)

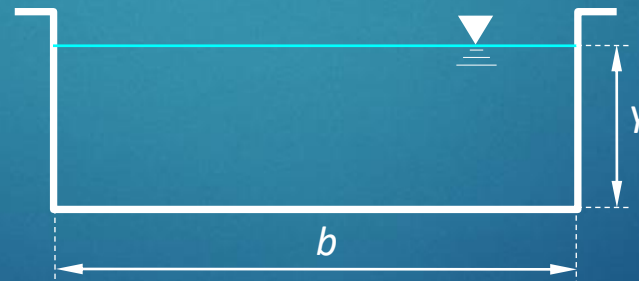
$$- \Omega = b Y$$

$$- B = b + 2 Y$$

$$- \mathfrak{R} = \frac{\Omega}{B} = \frac{b Y}{b + 2 Y}$$

$$- \chi = k_s \mathfrak{R}^{1/6} = k_s \left(\frac{b Y}{b + 2 Y} \right)^{1/6}$$

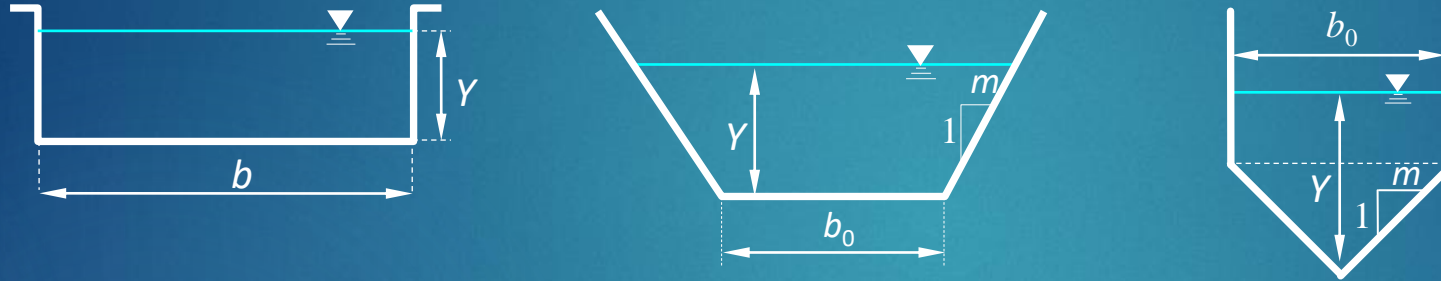
$$- Q = \chi \Omega \sqrt{\mathfrak{R} i_f} = k_s \mathfrak{R}^{1/6} \Omega \sqrt{\mathfrak{R} i_f} = k_s \mathfrak{R}^{2/3} \Omega \sqrt{i_f} = k_s \left(\frac{b Y}{b + 2 Y} \right)^{2/3} b Y \sqrt{i_f}$$



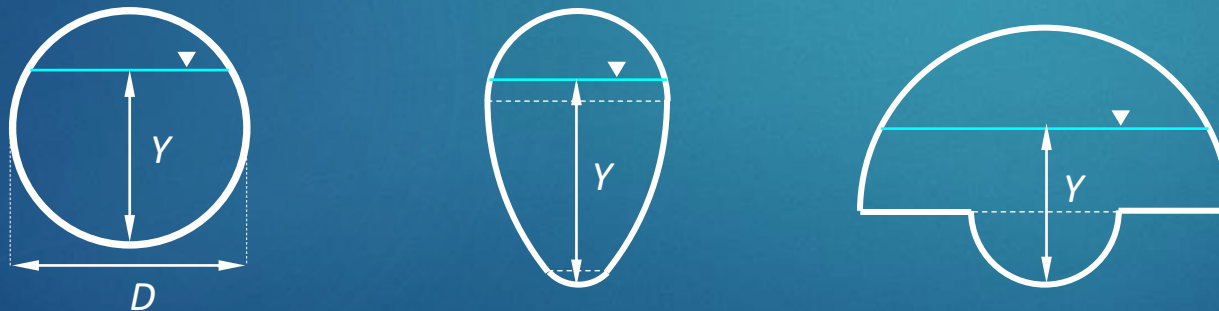
Moto uniforme

► Scala delle portate di moto uniforme

- Sezioni aperte (rettangolare, trapezoidale, composita, ...): $Q(Y)$ monotona crescente



- Sezioni chiuse (circolare, ovoidale, composita,...): $Q(Y)$ presenta un massimo relativo in prossimità del cielo della sezione



- ✓ massimo di portata determinato da massimo relativo del raggio idraulico $\mathfrak{R} = \Omega/B$: in prossimità del cielo della sezione l'area della sezione liquida Ω aumenta con Y molto più lentamente del contorno bagnato B



Moto uniforme

► Uso pratico della scala delle portate di moto uniforme

$$Q(Y) = \chi \Omega \sqrt{\Re i_f} \quad ; \quad \chi \Omega \sqrt{\Re} = F(Y)$$

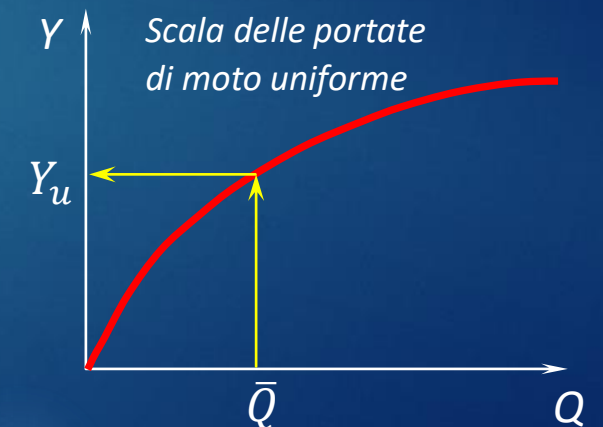
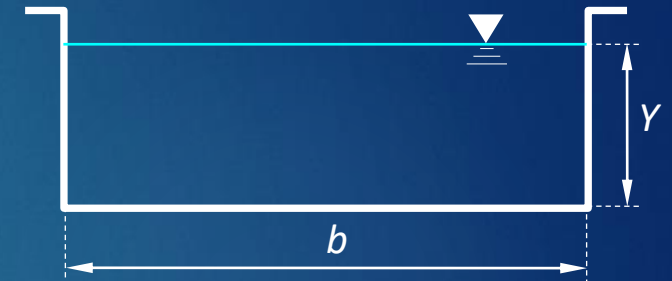
- Nota Y_u determinare Q : soluzione esplicita
- Nota Q determinare Y_u : equazione implicita per Y_u
 - Anche nel caso semplice di sezione rettangolare qualunque, Y_u non è esplicitabile

$$Q = k_s \left(\frac{b Y}{b + 2 Y} \right)^{2/3} b Y \sqrt{i_f} \quad \text{razionalizzata fornisce un'equazione algebrica del 5° grado}$$

$$\text{► Caso particolare: } b \gg Y \longrightarrow \Re = \frac{b Y}{b + 2 Y} \cong Y \longrightarrow Q = k_s b Y^{5/3} \sqrt{i_f}$$

✓ applicabilità ipotesi da valutare caso per caso!

- Y_u esplicitabile in sezione triangolare (poco utilizzata nella pratica)
- Modalità di soluzione generale del problema
 - Soluzione grafica da scala delle portate
 - Soluzione iterativa: $f(Y) = Q - \chi \Omega \sqrt{\Re i_f} = 0$ in cui $\chi \Omega \sqrt{\Re} = F(Y)$ è nota
- Talora si usa la scala delle portate ridotte (o specifiche) $Q / \sqrt{i_f} = \chi \Omega \sqrt{\Re}$ (stessa forma di $Q = \chi \Omega \sqrt{\Re i_f}$)



Moto uniforme

► Sezioni di forma irregolare

- L'equazione di Chezy può cadere in difetto (esempio: passaggio da alveo di magra ad alveo di piena)
 - Ω aumenta con continuità; B aumenta con discontinuità; $\Re = \Omega/B$ diminuisce con discontinuità \longrightarrow Q diminuisce con discontinuità: irrealistico

- Costruzione della scala delle portate di moto uniforme per sezioni composite

- Suddivisione della sezione liquida in N parti di forma regolare
 - ✓ Suddivisione ideale lungo linee normali alle linee *isotachie* (di uguale velocità)
- Ipotesi: velocità media U uguale per tutte le parti della sezione
- Equazione di Chezy per ciascuna parte (j -esima) della sezione della corrente

$$\frac{U}{\sqrt{i_f}} = \chi_j \sqrt{\Re_j} = \chi_j \sqrt{\Omega_j / B_j} \longrightarrow \Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j = \sum_{j=1}^N \frac{U^2}{i_f} \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{i_f} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}$$

$$\text{da cui } i_f = \frac{U^2}{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{\Re} \frac{1}{B} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{\Re \chi^2} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\chi^2} = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}$$

- ✓ Il procedimento equivale a sommare le azioni di trascinamento sulle parti del contorno bagnato
- ✓ procedimento applicabile a sezioni di forma regolare con scabrezze del contorno variabili

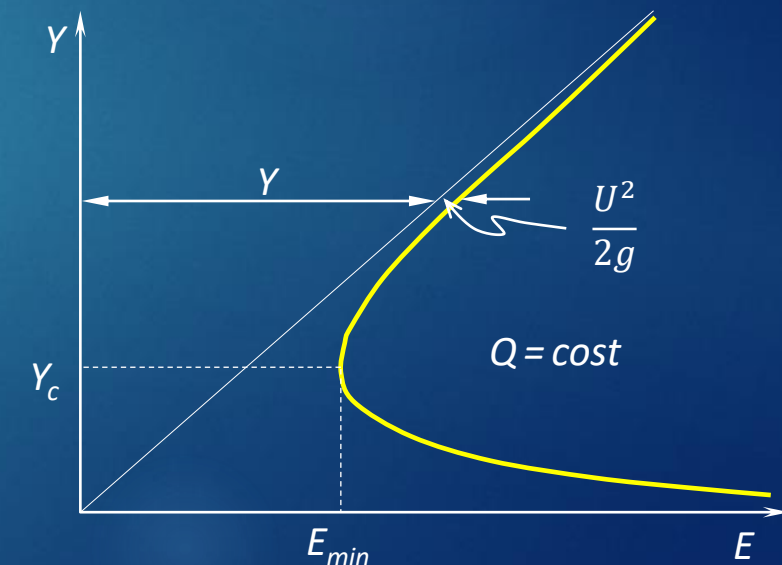
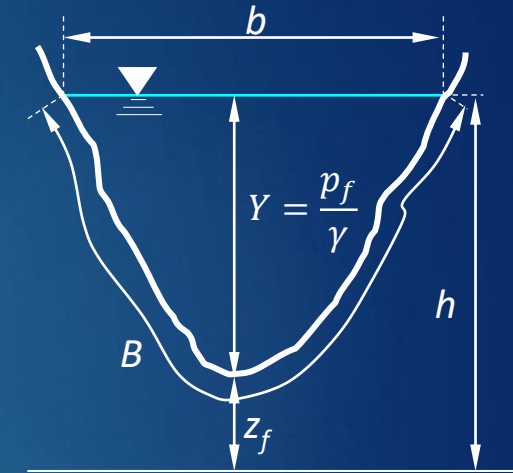




Caratteristiche energetiche

► Carico rispetto al fondo (carico specifico)

- Definizione: $E = H - z_f = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} - z_f$
 - In sezioni regolari $h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} = z_f + \frac{p_f}{\gamma} = z_f + Y \longrightarrow E = Y + \frac{U^2}{2g}$
- Carico specifico nel moto stazionario
 - Moto stazionario $\longrightarrow Q = \text{cost} \longrightarrow E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = E(Y)$
 - Studio della funzione energia specifica
 - $Y \rightarrow 0 \longrightarrow \Omega \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \rightarrow \infty \longrightarrow E \rightarrow \infty$
 - $Y \rightarrow \infty \longrightarrow \Omega \rightarrow \infty \longrightarrow \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \rightarrow 0 \longrightarrow E \rightarrow Y \rightarrow \infty$
 - ✓ la bisettrice del quadrante è asintoto obliquo per la $E(Y)$
 - $E \rightarrow \infty$ agli estremi dell'intervallo di definizione di $E \longrightarrow$ deve esistere un minimo relativo E_{min} (stato critico)
 - La profondità corrispondente è detta *profondità critica* Y_c

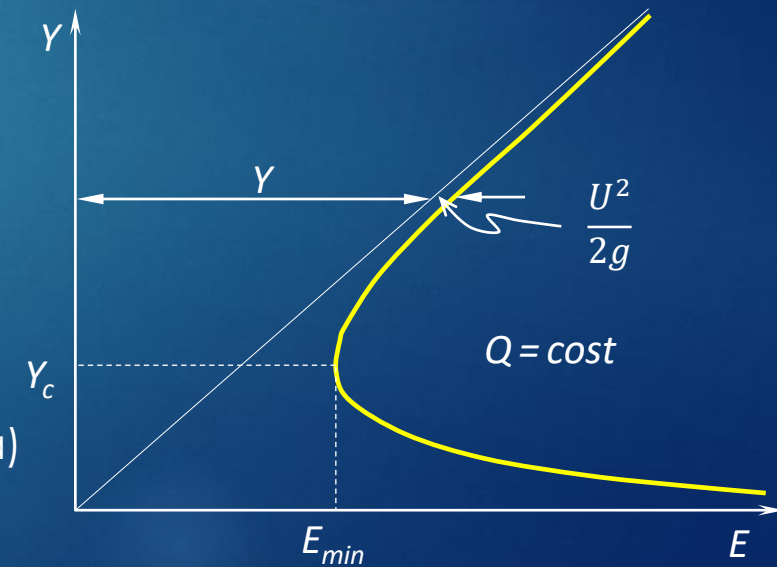
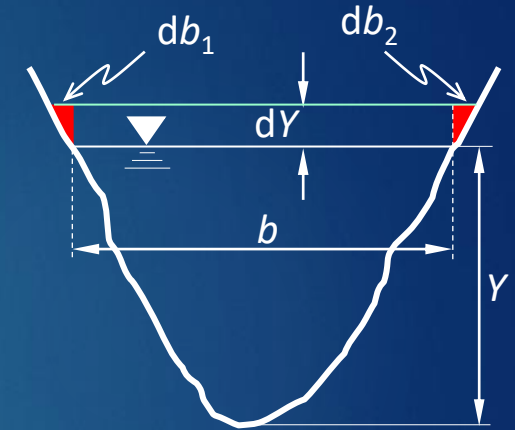




Stato critico (Q costante)

► Determinazione della profondità critica

- $E = E_{min}$ dove $dE/dY = 0$
- $dE/dY = \frac{d}{dY} \left(Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) = 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\Omega^2} \right) = 1 + \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{\Omega^3} \right) \frac{d\Omega}{dY} = 1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^3}$
 - $d\Omega = b dY + db_1 dY/2 + db_2 dY/2 \cong b dY \longrightarrow \frac{d\Omega}{dY} = b$
- $dE/dY = 0 \longrightarrow 1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} = 0 \longrightarrow \left(\frac{\Omega^3}{b} \right)_c = \frac{Q^2}{g}$ con $\frac{Q^2}{g} = \text{cost}$ e $\frac{\Omega^3}{b} = F(Y)$
 - In generale Y_c si determina numericamente o graficamente
 - Per sezione rettangolare: $\frac{\Omega^3}{b} = \frac{(bY)^3}{b} = b^2 Y^3 \longrightarrow Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$
- Energia specifica minima
 - $E_{min} = Y_c + \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} = Y_c + \frac{1}{2\Omega_c^2} \left(\frac{\Omega^3}{b} \right)_c = Y_c + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{b} \right)_c = Y_c + \frac{1}{2} Y_{m_c}$
 - $Y_m = \frac{\Omega}{b}$ profondità media (Y della sezione rettangolare di pari area)
 - Per sezione rettangolare $Y_m = Y \longrightarrow E_{min} = \frac{3}{2} Y_c$





Stato critico (E costante)

► Portate compatibili con un valore fissato di carico specifico $E = E_0$

- $E_0 = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \longrightarrow Q = \Omega\sqrt{2g(E_0 - Y)}$
 - $Q = 0$ per $Y = 0$ e $Y = E_0 \longrightarrow$ la portata deve avere un massimo relativo
- Determinazione delle condizioni di portata massima ($dQ/dY = 0$)

$$dQ/dY = \frac{d\Omega}{dY} \sqrt{2g(E_0 - Y)} + \Omega \frac{1}{2} \frac{(-2g)}{\sqrt{2g(E_0 - Y)}} = \frac{b2g(E_0 - Y) - g\Omega}{\sqrt{2g(E_0 - Y)}} = \frac{g[2b(E_0 - Y) - \Omega]}{\sqrt{2g(E_0 - Y)}} = 0$$

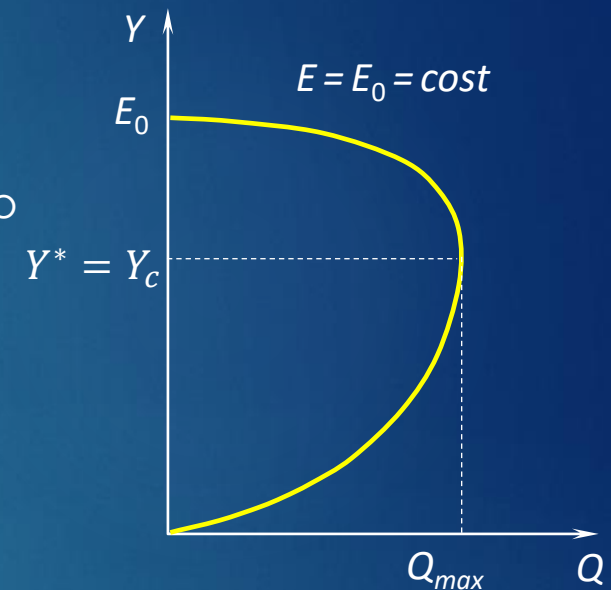
$$dQ/dY = 0 \text{ per } 2b^*(E_0 - Y^*) - \Omega^* = 0 \longrightarrow E_0 = Y^* + \frac{\Omega^*}{2b^*} = Y^* + \frac{Y_m^*}{2}$$

– Espressione della portata massima

$$Q_{max} = \Omega^* \sqrt{2g(E_0 - Y^*)} = \Omega^* \sqrt{2g \frac{\Omega^*}{2b^*}} = \Omega^* \sqrt{\frac{g\Omega^*}{b^*}} = \Omega^* \sqrt{gY_m^*} \longrightarrow \left(\frac{\Omega^3}{b}\right)^* = \frac{Q_{max}^2}{g}$$

– Espressioni $E_0 = Y^* + \frac{Y_m^*}{2}$ e $\left(\frac{\Omega^3}{b}\right)^* = \frac{Q_{max}^2}{g}$ formalmente identiche a $E_{min} = Y_c + \frac{1}{2}Y_{m_c}$ e $\left(\frac{\Omega^3}{b}\right)_c = \frac{Q^2}{g}$

✓ La portata massima Q_{max} corrispondente a un fissato valore di carico specifico E_0 fluisce con profondità critica per la portata Q_{max} mantenuta costante, per la quale $E_0 = E_{min}$

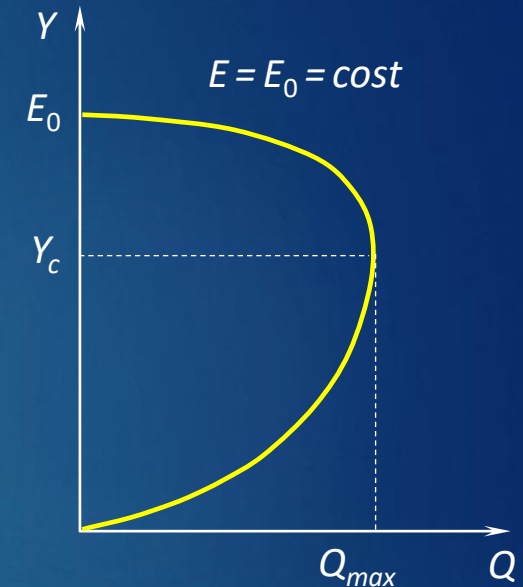




Stato critico (E costante)

► Portata massima a carico specifico costante

- $E_0 = Y_C + \frac{1}{2}Y_{m_c} \quad ; \quad Q_{max} = \Omega_c \sqrt{\frac{g\Omega_c}{b_c}} = \Omega_c \sqrt{gY_{m_c}}$
 - In generale Y_C si determina numericamente o graficamente
 - Per sezione rettangolare
 - $Y_m = Y \longrightarrow Y_C = \frac{2}{3}E_0 \quad ; \quad Q_{max} = bY_C \sqrt{gY_C} = \sqrt{\frac{8}{27}} b \sqrt{g} E_0^{3/2}$



► Caratteristiche cinematiche delle correnti a pelo libero

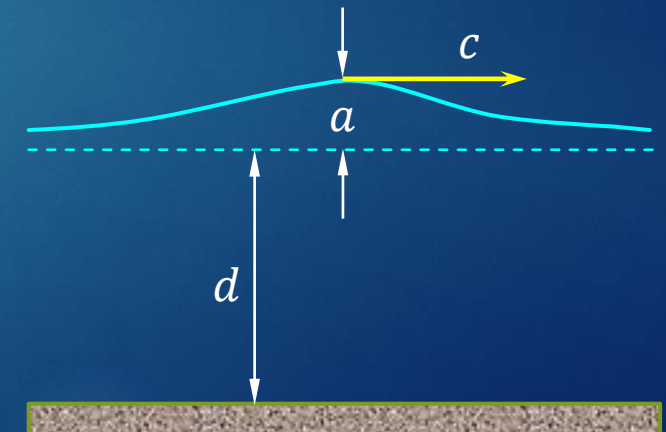
- Velocità media nello stato critico (velocità critica)

$$\left(\frac{\Omega^3}{b}\right)_c = \frac{Q^2}{g} \longrightarrow U_c = \frac{Q}{\Omega_c} = \sqrt{g \frac{\Omega_c}{b_c}} = \sqrt{gY_{m_c}}$$

- Celerità di propagazione delle piccole perturbazioni ($a/d \ll 1$)

$$c = \sqrt{gY_m} \quad (\text{propagazione in liquido fermo})$$

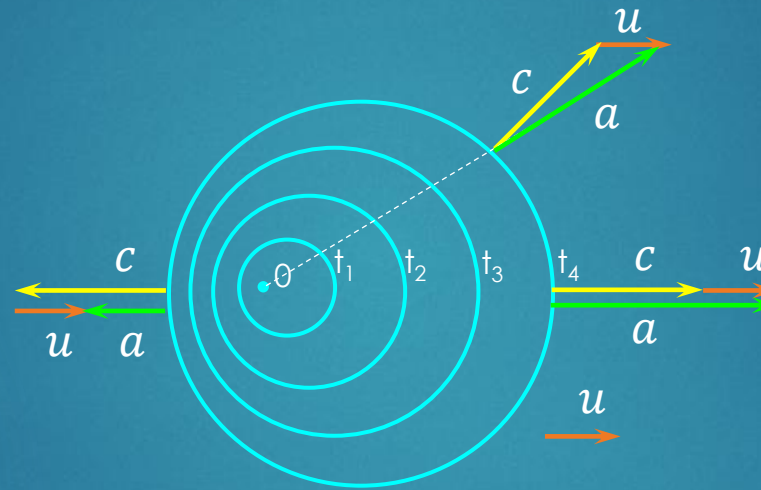
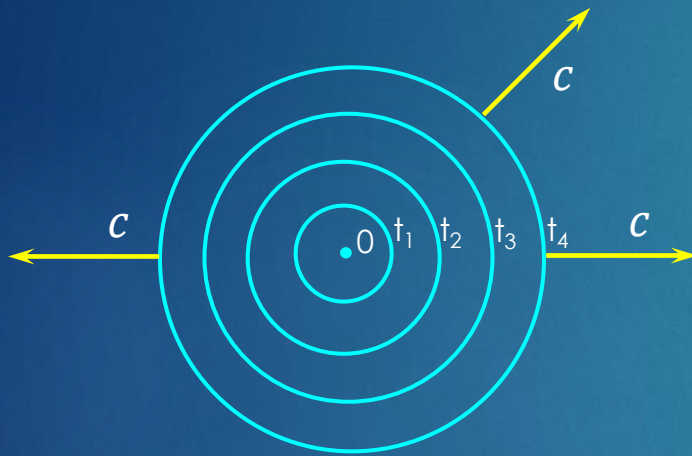
- ✓ In stato critico: velocità corrente = celerità perturbazioni



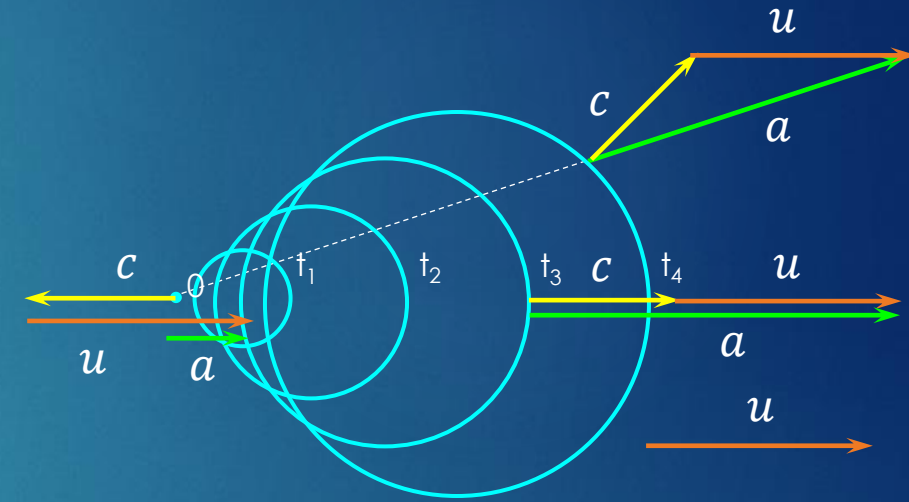
Propagazione piccole perturbazioni

► Onde circolari (schema 2D)

- Liquido in quiete
- liquido in movimento ($u < c$)

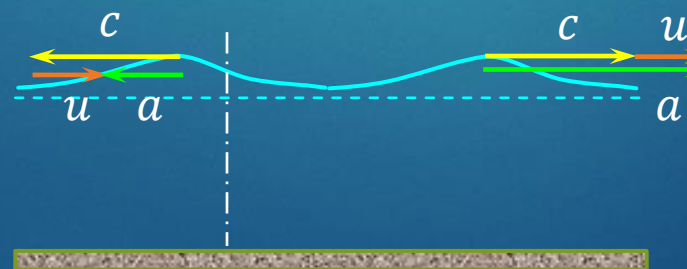
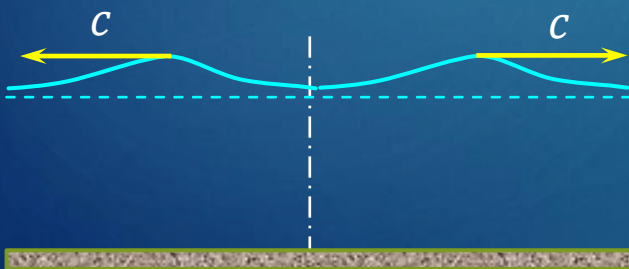


- liquido in movimento ($u > c$)

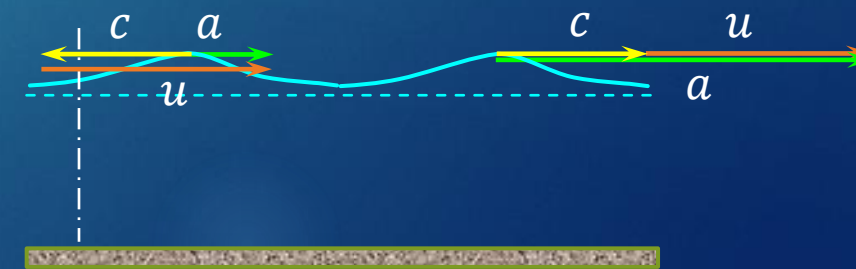


► Onde nei canali (schema 1D)

- Liquido in quiete
- liquido in movimento ($u < c$)



- liquido in movimento ($u > c$)





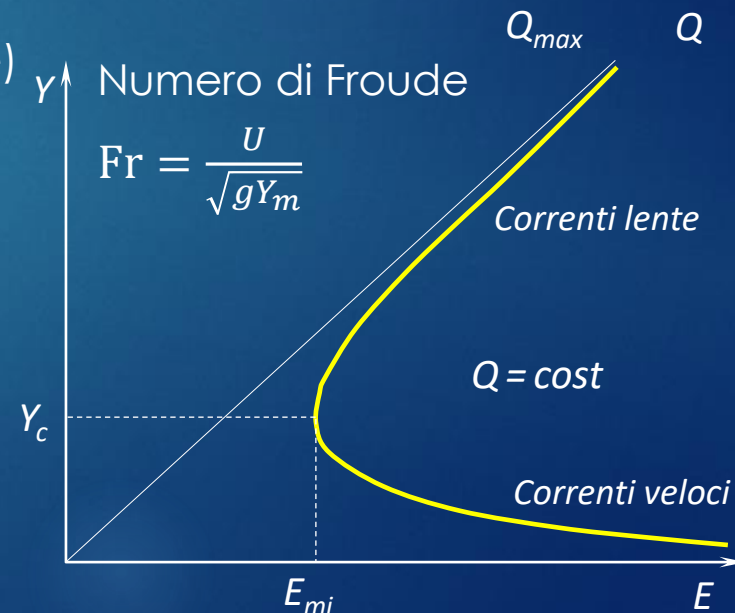
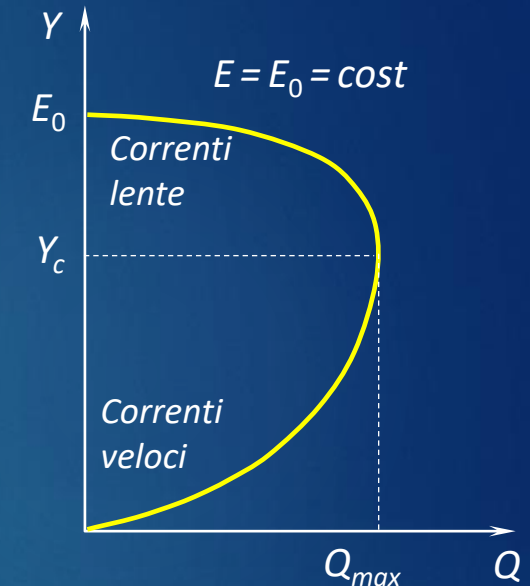
Classificazione delle correnti a p.l.

► Celerità relativa e celerità assoluta delle piccole perturbazioni

- $c = \sqrt{gY_m}$ celerità *relativa* (in liquido fermo o rispetto a osservatore in moto traslatorio uniforme con la velocità U dalla corrente)
- $a = U \pm c = U \pm \sqrt{gY_m}$ celerità *assoluta* (rispetto ad osservatore fisso)

► Classificazione delle correnti a pelo libero (Q fissata)

- $Y > Y_c : Y_m > Y_{m_c} \Rightarrow c = \sqrt{gY_m} > \sqrt{gY_{m_c}} = U_c > U$ (corrente lenta)
- $Y < Y_c : Y_m < Y_{m_c} \Rightarrow c = \sqrt{gY_m} < \sqrt{gY_{m_c}} = U_c < U$ (corrente veloce)
- $Y = Y_c : Y_m = Y_{m_c} \Rightarrow c = \sqrt{gY_m} = \sqrt{gY_{m_c}} = U_c = U$ (corrente critica)



| denominazione | definizione | proprietà |
|------------------------------------|---------------------------|--|
| correnti lente (subcritiche) | $Y > Y_c$ ($Fr < 1$) | $U < \sqrt{gY_m}$ le perturbazioni si propagano sia verso monte che verso valle. |
| correnti critiche | $Y = Y_c$ ($Fr = 1$) | $U = \sqrt{gY_m}$ perturbazione di celerità relativa rivolta verso monte stazionaria rispetto a un osservatore fisso |
| correnti veloci (supercritiche) | $Y < Y_c$ ($Fr > 1$) | $U > \sqrt{gY_m}$ le perturbazioni si propagano soltanto verso valle. |



Classificazione degli alvei

| denominazione | definizione |
|-------------------------------------|---|
| alvei a debole pendenza (fluviali) | $Y_u > Y_c \equiv i_f < i_c \equiv$ corrente di moto uniforme lenta |
| alvei a pendenza critica | $Y_u = Y_c \equiv i_f = i_c \equiv$ corrente di moto uniforme critica |
| alvei a forte pendenza (torrentizi) | $Y_u < Y_c \equiv i_f > i_c \equiv$ corrente di moto uniforme veloce |

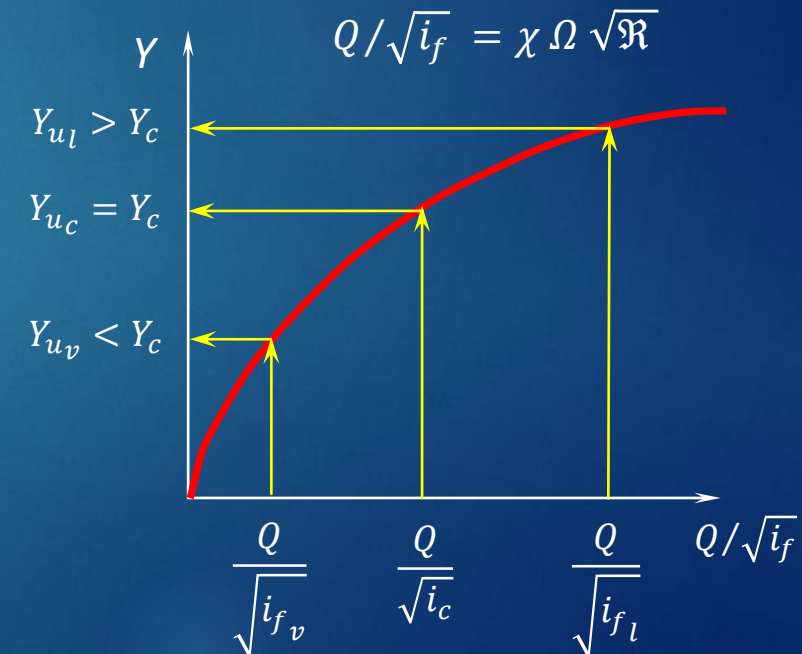
N.B.: In ciascuno dei tre tipi di alveo si possono avere correnti sia lente che veloci. La classificazione è basata unicamente sul moto uniforme

► Pendenza critica

- pendenza per la quale risulta $Y_u = Y_c$
- determinabile dalla scala delle portate specifiche di moto uniforme

► Osservazioni

- La natura di alveo a pendenza debole, critica o forte non è una caratteristica intrinseca dell'alveo (non dipende solo dalla pendenza)
- La tipologia di alveo dipende anche dalla portata
 - ✓ Uno stesso alveo può risultare a debole pendenza per un certo valore di portata e a forte pendenza per un altro valore di portata
- Nella pratica, la tipologia di alveo si deduce dal confronto fra profondità di moto uniforme e profondità critica (non si calcola i_c)



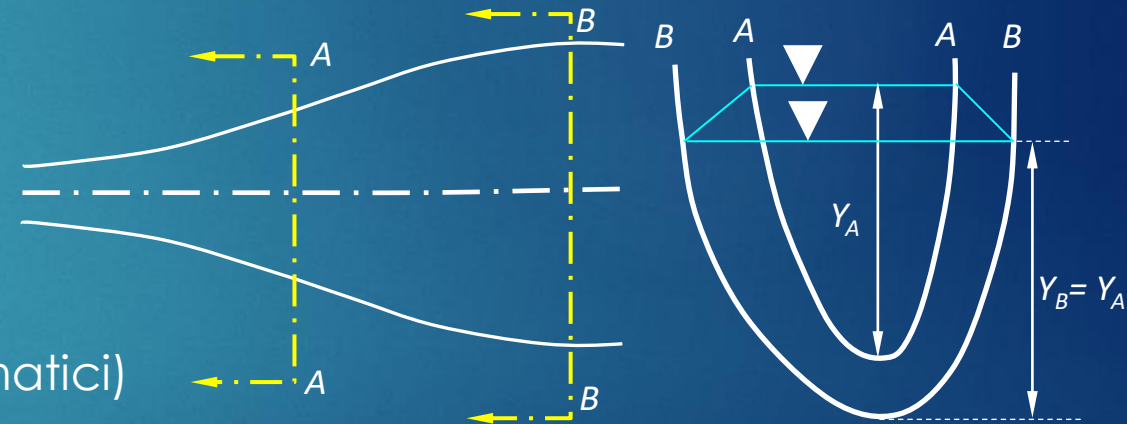
Profili di moto permanente

► Equazione differenziale dei profili di moto permanente ($Q = \text{cost}$ lungo l'asse)

- Moto permanente (stazionario) $\longrightarrow Q = \text{cost}$ (da equazione di continuità)
- $\frac{\partial H}{\partial s} = -j = -\frac{\tau_0}{\gamma R} = -\frac{U^2}{\chi^2 R}$ (tipicamente il regime è assolutamente turbolento nelle correnti a pelo libero)
- $E = H - z_f \longrightarrow \frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{dz_f}{ds} = -j + i_f$

$$\boxed{\frac{dE}{ds} = i_f - j}$$

✓ generalmente richiesta soluzione numerica



► Profili di moto permanente in alvei cilindrici (o prismatici)

- Per alvei di forma qualunque $E = E(Y(s), s)$
 - ✓ Ω diversi in sezioni differenti ($Q = \text{cost}$) per uguale profondità $Y_A = Y_B \longrightarrow E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$ diversi ($\Omega_A \neq \Omega_B$)
- Per alvei cilindrici $E = E(Y(s))$
 - ✓ Area Ω funzione univoca della profondità



Profili di moto permanente

► Profili di moto permanente in alvei cilindrici (prismatici)

- Equazione differenziale del profilo: $E = E(Y(s)) \longrightarrow \frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dY} \frac{dY}{ds} = i_f - j \longrightarrow$
- L'equazione differenziale del profilo si presta meglio alla discussione nella forma

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{dE/dY}$$

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{\frac{dE}{dY}} = i_f \frac{N}{D} \quad \text{con} \quad N = 1 - \frac{j}{i_f} = 1 - \frac{U^2}{\chi^2 \Re i_f} = 1 - \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2 i_f} ; \quad D = 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1 - \text{Fr}^2 \quad \left(\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{g Y_m}} \right)$$

- Per alveo declive ($i_f > 0$)

$$- Y = Y_u \longrightarrow j = i_f \longrightarrow N = 1 - \frac{j}{i_f} = 0$$

$$- Y \rightarrow 0 \longrightarrow \chi^2 \Re \Omega^2 \rightarrow 0 \longrightarrow N = 1 - \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2 i_f} \rightarrow -\infty$$

$$- Y \rightarrow \infty \longrightarrow \chi^2 \Re \Omega^2 \rightarrow \infty \longrightarrow N = 1 - \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2 i_f} \rightarrow 1$$

$$- Y = Y_c \longrightarrow E = E_{min} \longrightarrow D = \frac{dE}{dY} = 0$$

$$- Y \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{b}{\Omega^3} \rightarrow \infty (*) \longrightarrow D = 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} \rightarrow -\infty$$

$$- Y \rightarrow \infty \longrightarrow \frac{b}{\Omega^3} \rightarrow 0 (***) \longrightarrow D = 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} \rightarrow 1$$

(*) Ω^3 infinitesimo di ordine superiore a b

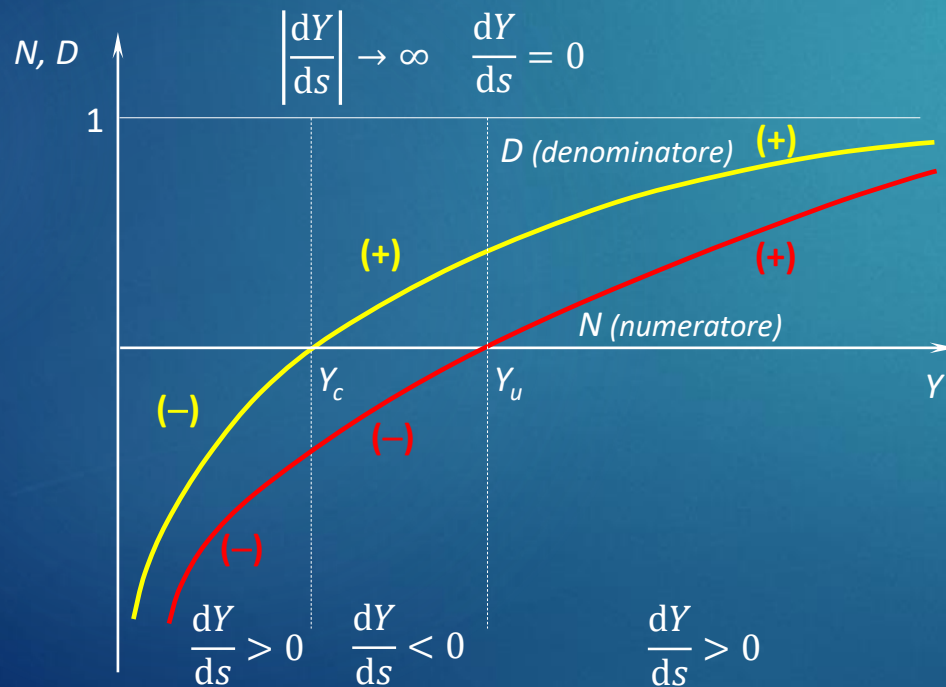
(***) Ω^3 infinito di ordine superiore a b



Profili di moto permanente - $i_f < i_c$

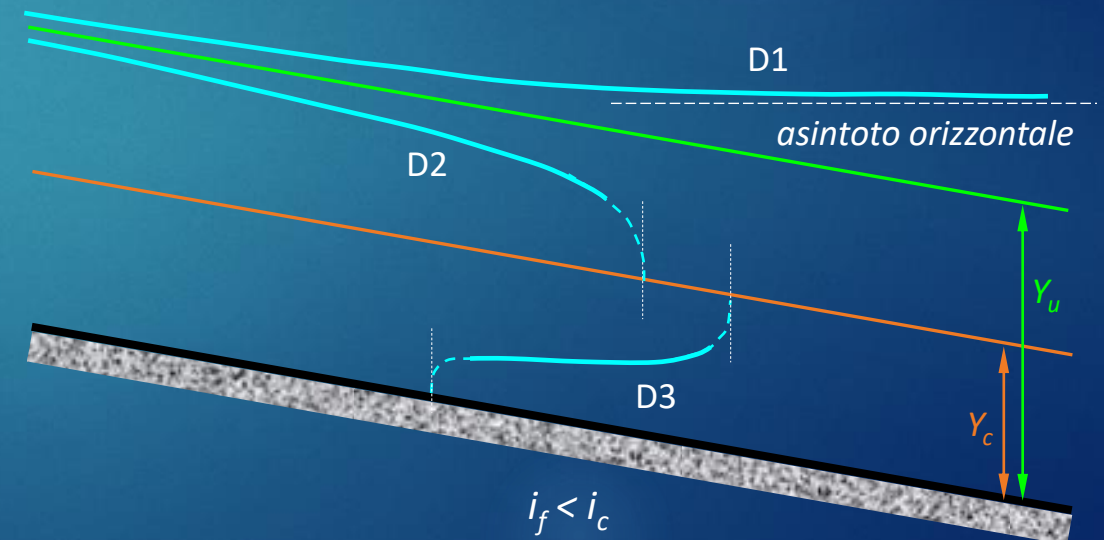
► alvei cilindrici a debole pendenza ($Y_u > Y_c$)

$$\bullet \quad \frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{Q^2}{\chi^2 R \Omega^2 i_f}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = i_f \frac{N}{D} \quad ; \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y = Y_u \\ Y = Y_c \\ Y \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow \infty \end{cases}$$



| | | |
|-------------------------|-------------------------|---|
| $N = 0$ | — | $\frac{dY}{ds} = 0$ |
| — | $D = 0$ | $\frac{dY}{ds} \rightarrow \pm\infty$ |
| $N \rightarrow -\infty$ | $D \rightarrow -\infty$ | $\frac{dY}{ds} \rightarrow +\infty (*)$ |
| $N \rightarrow 1$ | $D \rightarrow 1$ | $\frac{dY}{ds} \rightarrow i_f$ |

(*) si dimostra per sezione rettangolare



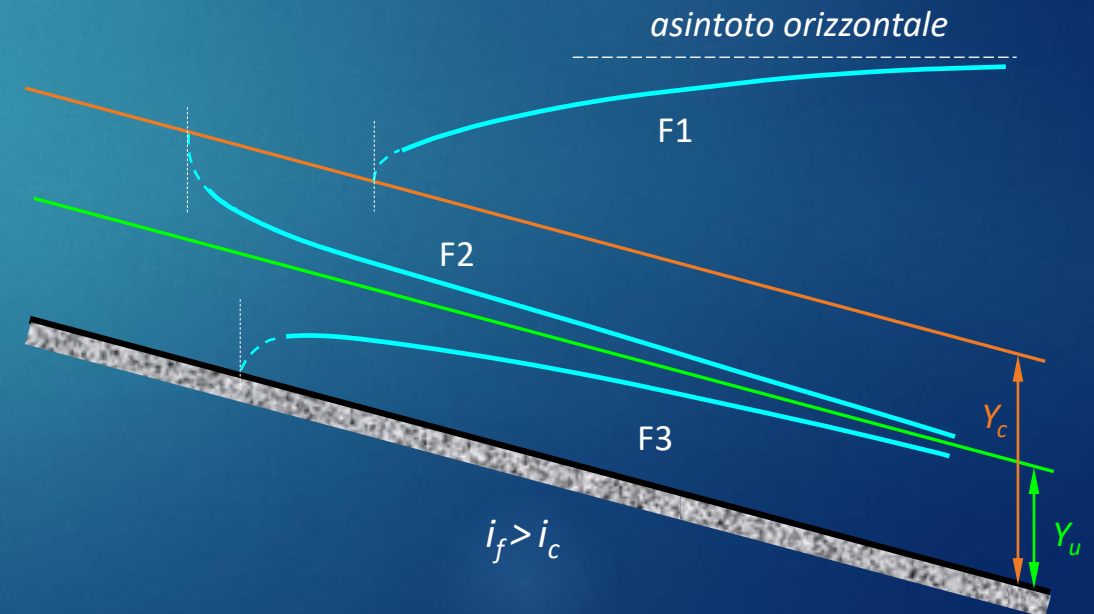
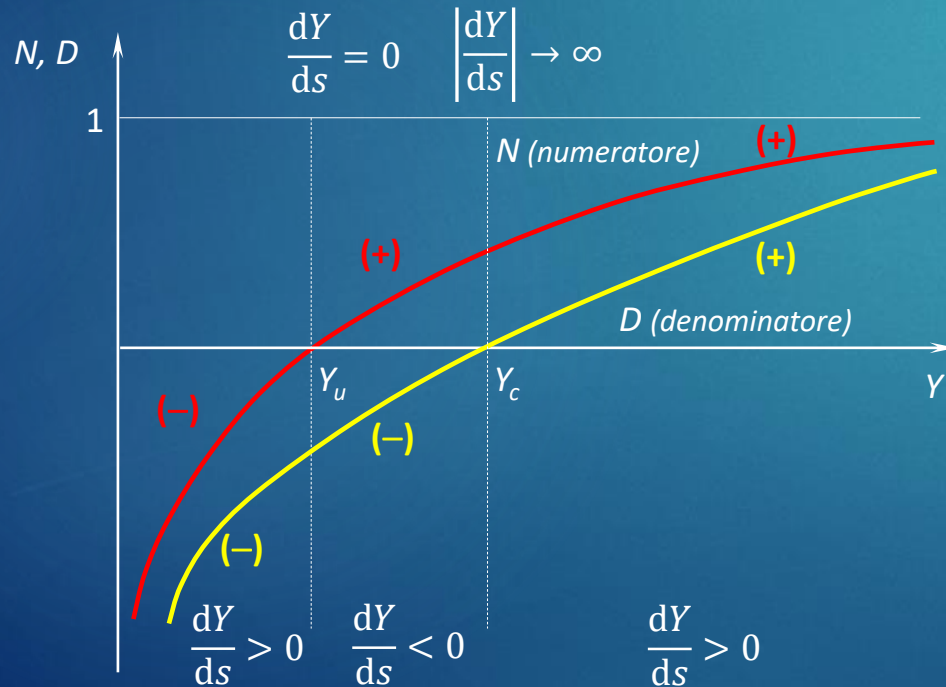
Profili di moto permanente - $i_f > i_c$

► alvei cilindrici a forte pendenza ($Y_u < Y_c$)

$$\bullet \quad \frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2 i_f}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = i_f \frac{N}{D} \quad ; \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y = Y_u \\ Y = Y_c \\ Y \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow \infty \end{cases}$$

| | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| $N = 0$ | – | $dY/ds = 0$ |
| – | $D = 0$ | $dY/ds \rightarrow \pm\infty$ |
| $N \rightarrow -\infty$ | $D \rightarrow -\infty$ | $dY/ds \rightarrow +\infty (*)$ |
| $N \rightarrow 1$ | $D \rightarrow 1$ | $dY/ds \rightarrow i_f$ |

(*) si dimostra per sezione rettangolare



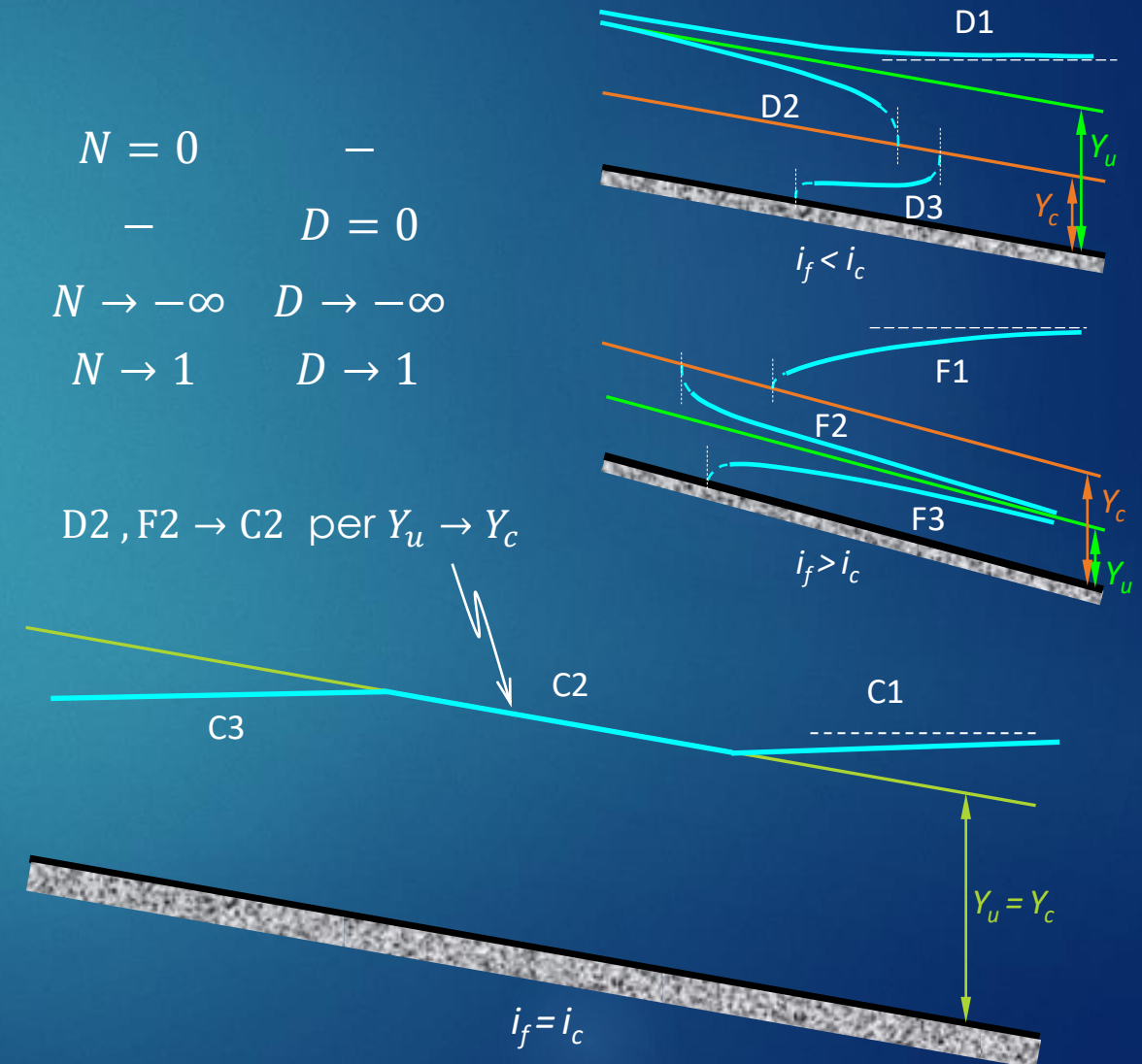
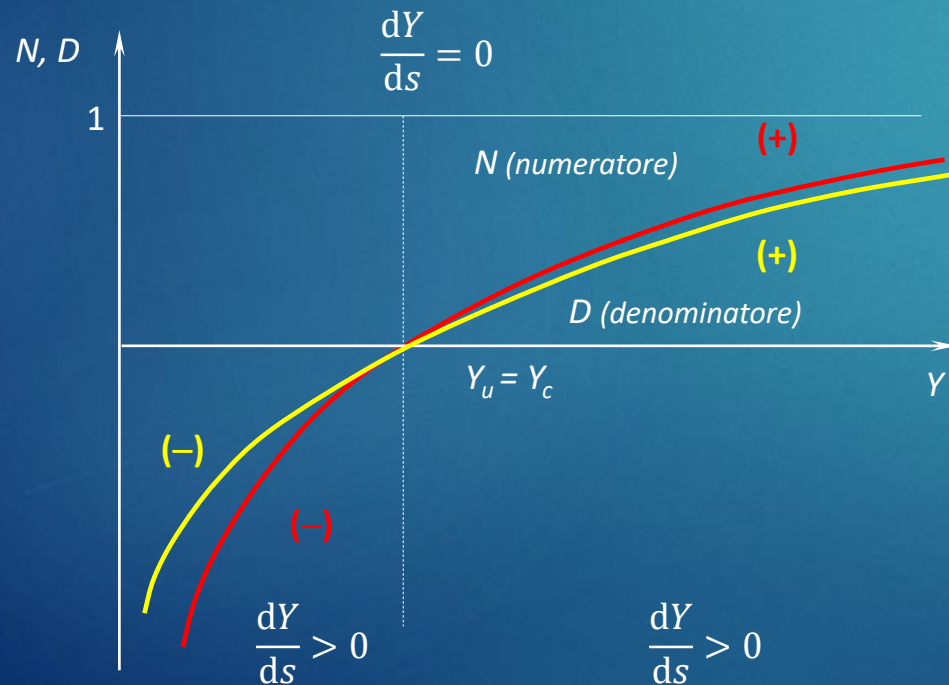


Profili di moto permanente - $i_f = i_c$

► alvei cilindrici a pendenza critica ($Y_u = Y_c$)

$$\bullet \quad \frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2 i_f}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = i_f \frac{N}{D} \quad ; \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y = Y_u \\ Y = Y_c \\ Y \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} N = 0 & - \\ - & D = 0 \\ N \rightarrow -\infty & D \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow 1 & D \rightarrow 1 \end{array}$$



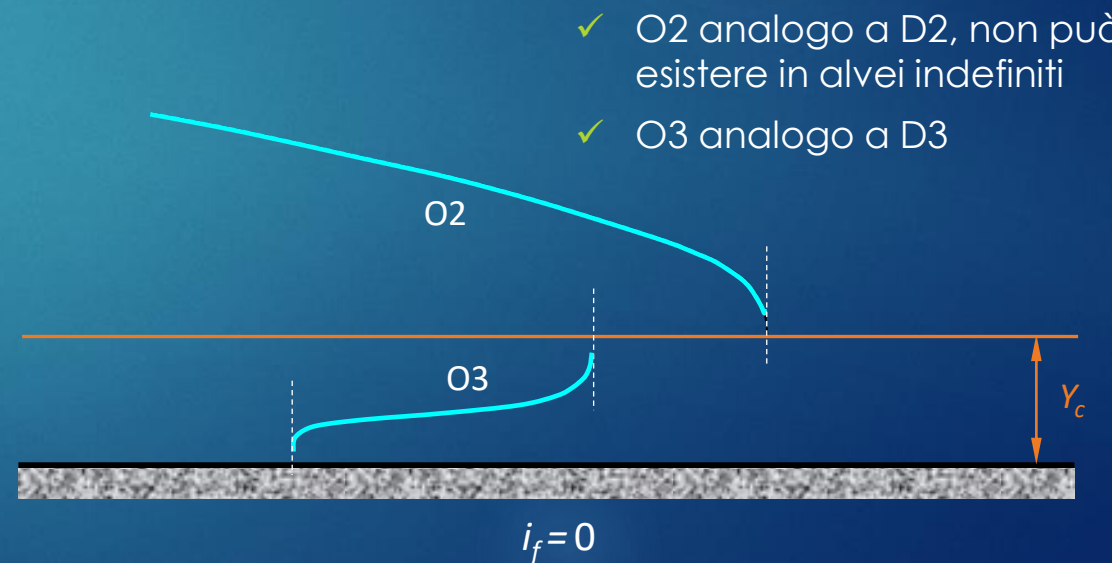
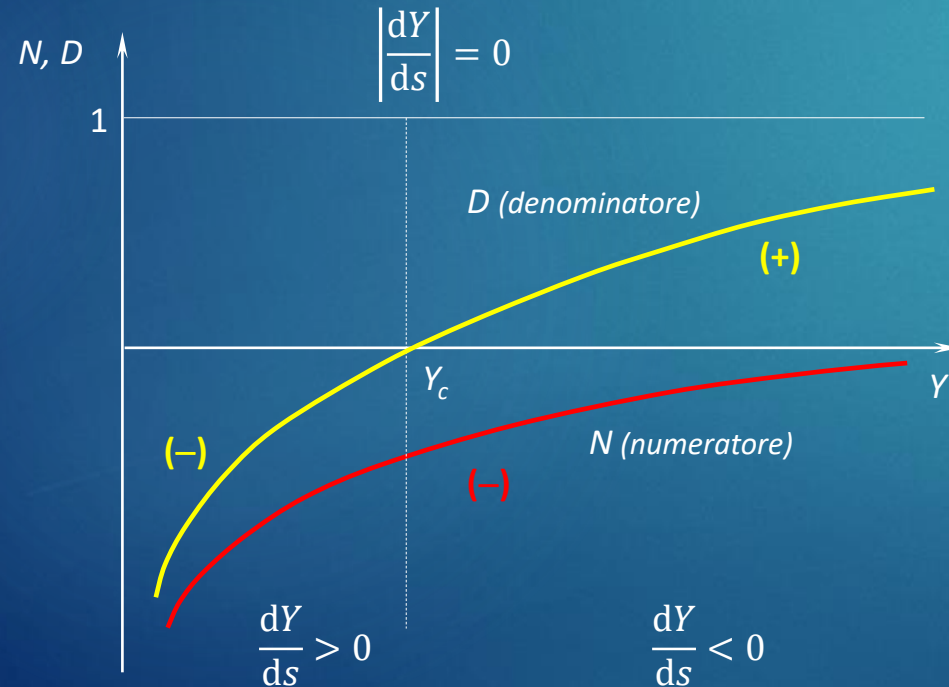


Profili di moto permanente - $i_f = 0$

► alvei cilindrici a pendenza nulla ($Y_u = \infty$)

$$\bullet \quad \frac{dY}{ds} = \frac{-\frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = \frac{N}{D} \quad ; \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y = Y_u \rightarrow \infty & N \rightarrow 0 & - \\ Y = Y_c & - & D = 0 \\ Y \rightarrow 0 & N \rightarrow -\infty & D \rightarrow -\infty \\ Y \rightarrow \infty & N \rightarrow 0 & D \rightarrow 1 \end{cases}$$

- $\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \chi \Omega \sqrt{\Re}$
- $\chi \Omega \sqrt{\Re} = F(Y)$ monotona crescente
- $\lim_{i_f \rightarrow 0} \frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \infty = \chi \Omega \sqrt{\Re}$ se $Y \rightarrow \infty$



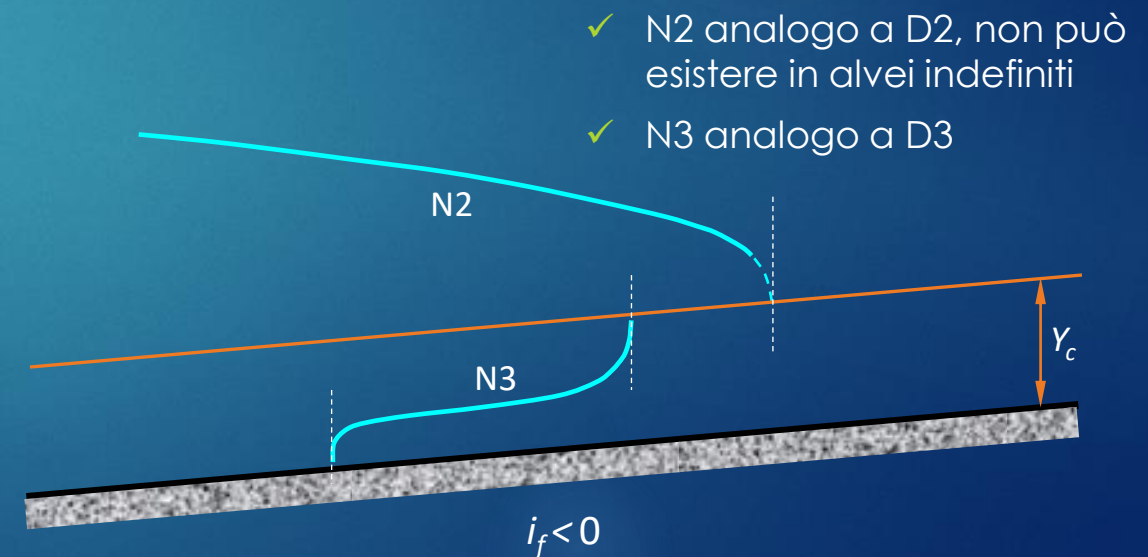
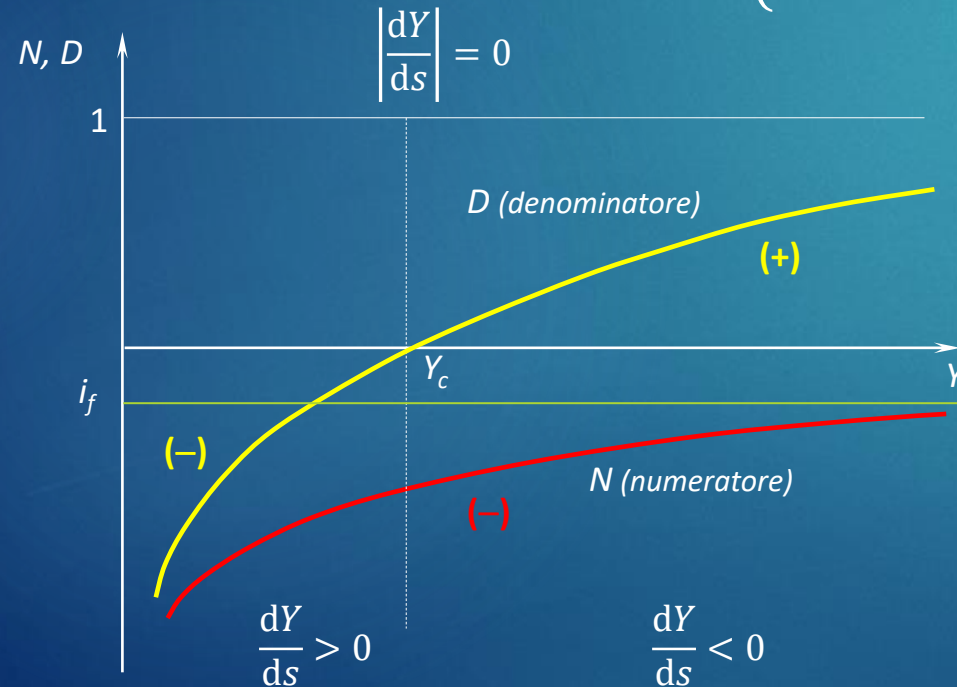
Profili di moto permanente - $i_f < 0$

► alvei cilindrici in contropendenza (Y_u non definita)

$$\bullet \frac{dY}{ds} = \frac{i_f - \frac{Q^2}{\chi^2 R \Omega^2}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} = \frac{N}{D} ; \text{ con } \begin{cases} Y = Y_u = n.d. & - & - \\ Y = Y_c & - & D = 0 \\ Y \rightarrow 0 & N \rightarrow -\infty & D \rightarrow -\infty \\ Y \rightarrow \infty & N \rightarrow i_f & D \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \chi \Omega \sqrt{R} ; \chi \Omega \sqrt{R} = F(Y)$$

$$\bullet i_f < 0 \longrightarrow \frac{Q}{\sqrt{i_f}} \text{ complesso} \longrightarrow Y \text{ complessa}$$





Tracciamento profili di moto perm.

► Condizioni al contorno (c.c.)

- Equazione differenziale dei profili (alveo qualunque: $E = E(Y(s), s)$)

$$\frac{dE}{ds} = i_f - j$$

- Equazione differenziale del 1° ordine ➡ richiesta una condizione al contorno
- modalità di specificazione delle c.c. legate alle modalità di propagazione delle piccole perturbazioni

- Correnti veloci: condizione al contorno da monte (perturbazioni soltanto verso valle) ✓
- Correnti lente: condizione al contorno da valle (perturbazioni verso monte e verso valle) (???)

✓ Moto permanente condizione asintotica di un moto vario: necessaria $Q=\text{cost}$ immessa da monte

✓ Moto vario retto da equazioni del moto e di continuità: 2 c.c. richieste

✓ c.c. corrispondenti a modalità di propagazione perturbazioni:

- 1 da monte e 1 da valle per correnti lente
- 2 da monte per correnti veloci

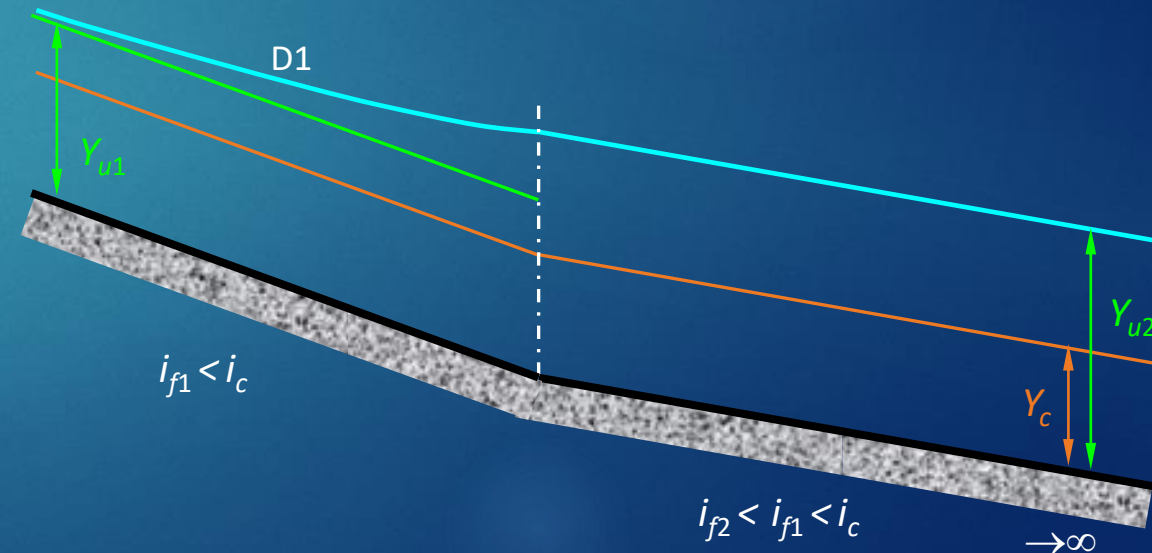
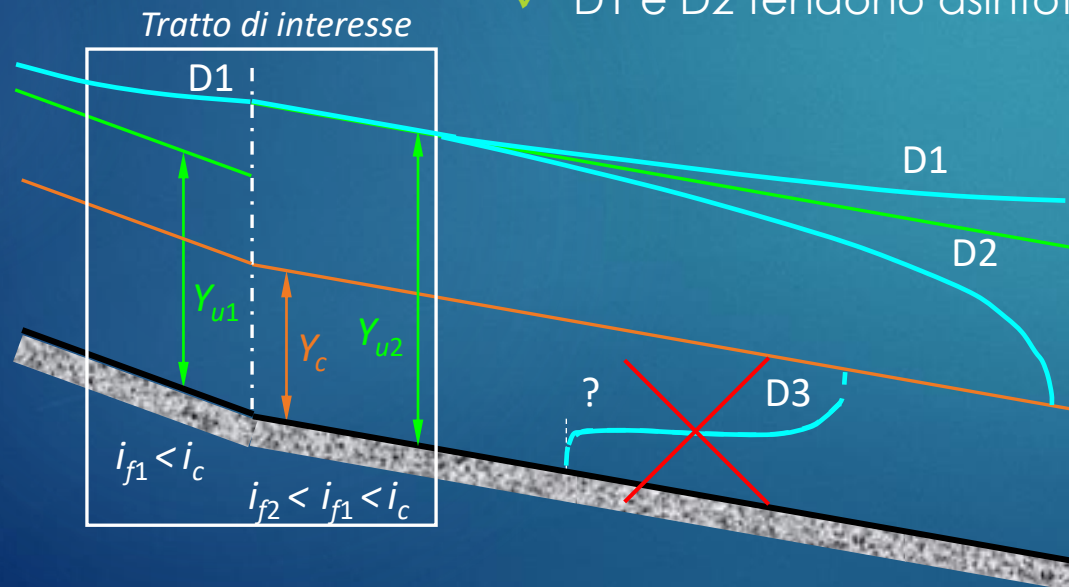
✓ c.c. da monte ($Q=\text{cost}$) necessaria per ottenere il moto permanente lascia disponibili:

- 1 c.c. da valle per correnti lente
- 1 c.c. da monte per correnti veloci

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \beta \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_0}{\gamma R} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

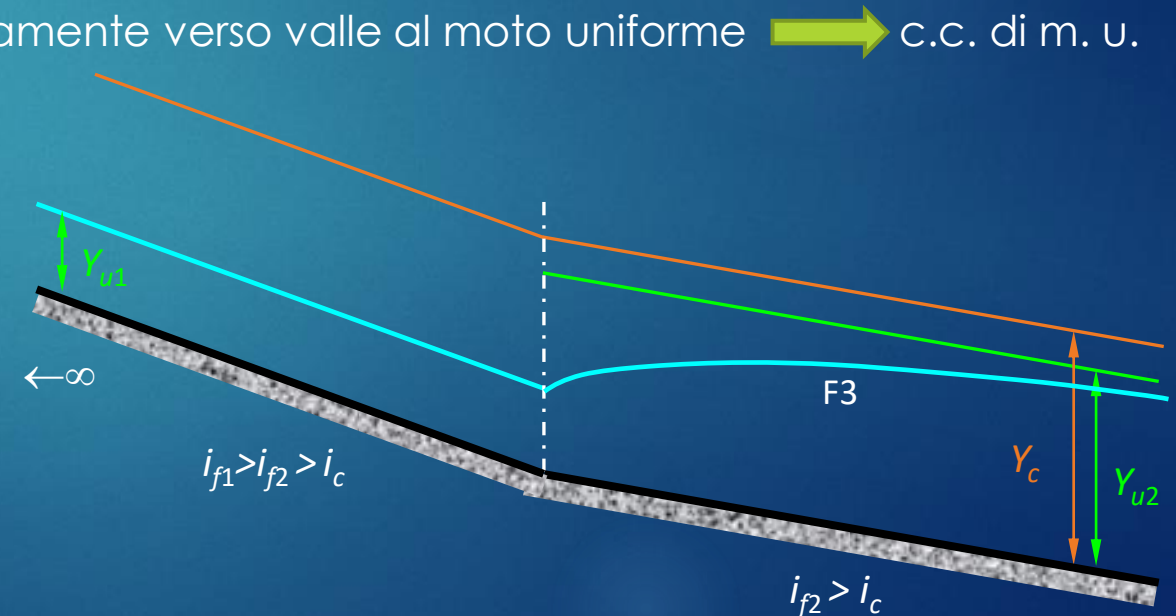
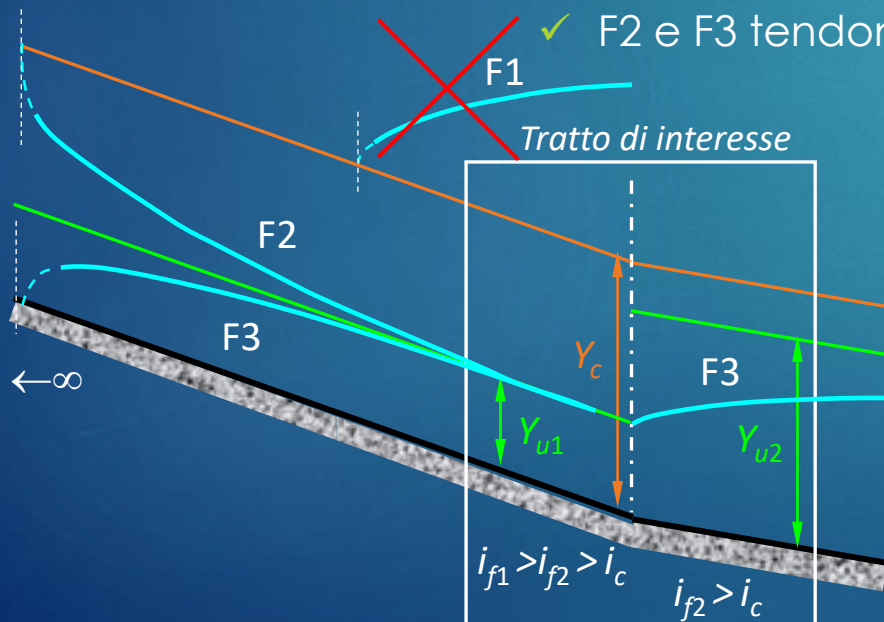
Tracciamento profili di moto perm.

- Condizioni al contorno ed effetti delle cause perturbatrici (c.p.) della corrente
 - Correnti lente (c.l.): c.c. da valle ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso monte solo in c.l.
 - Correnti veloci (c.v.): c.c. da monte ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso valle solo in c.v.
- Condizioni al contorno asintotiche in alvei di sviluppo indefinito (Q fissata)
 - **Alvei a debole pendenza** indefiniti verso valle: c.c. asintotica di moto uniforme (m.u.) da valle
 - ✓ c.c. da valle soltanto in corrente lenta (D1 o D2: escluso il D3 di corrente veloce)
 - ✓ D1 e D2 tendono asintoticamente verso monte al moto uniforme ➡ c.c. di m. u.



Tracciamento profili di moto perm.

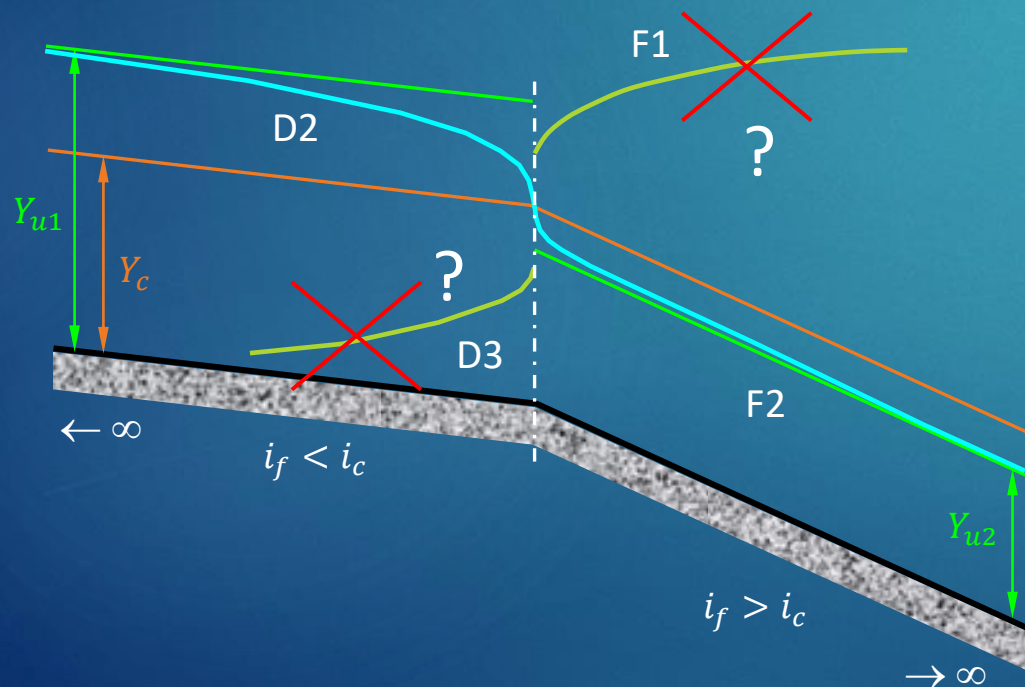
- ▶ Condizioni al contorno ed effetti delle cause perturbatrici (c.p.) della corrente
 - Correnti lente (c.l.): c.c. da valle ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso monte solo in c.l.
 - Correnti veloci (c.v.): c.c. da monte ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso valle solo in c.v.
- ▶ Condizioni al contorno asintotiche in alvei di sviluppo indefinito (Q fissata)
 - **Alvei a forte pendenza** indefiniti verso monte: c.c. asintotica di moto uniforme (m.u.) da monte
 - ✓ c.c. da monte soltanto in corrente veloce (F2 o F3: escluso l'F1 di corrente lenta)
 - ✓ F2 e F3 tendono asintoticamente verso valle al moto uniforme ➡ c.c. di m. u.





Tracciamento profili di moto perm.

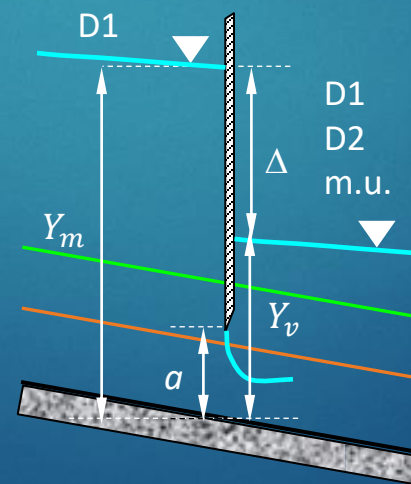
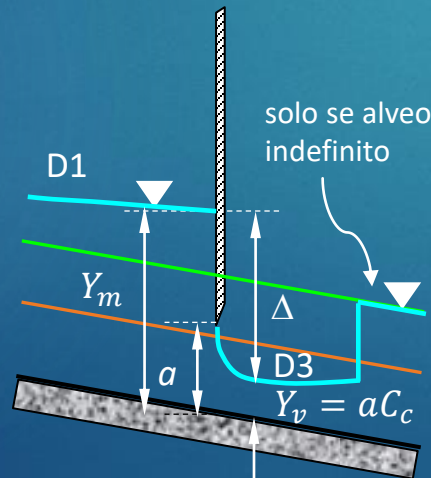
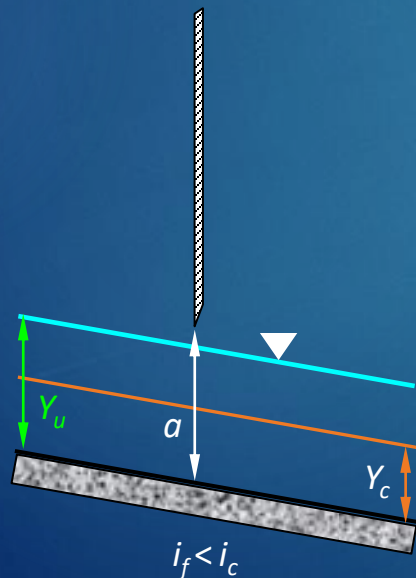
- Condizioni al contorno ed effetti delle cause perturbatrici (c.p.) della corrente
 - Correnti lente (c.l.): c.c. da valle ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso monte solo in c.l.
 - Correnti veloci (c.v.): c.c. da monte ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso valle solo in c.v.
- Condizioni al contorno in sezioni di controllo (Q fissata)
 - Transizione per lo stato critico nel passaggio da alveo a debole pendenza ad alveo a forte pendenza



- $\hat{Y} = Y_c$ sul cambio pendenza, D2 a monte, F2 a valle
- Verifica di tutte le possibilità ($\hat{Y} \gtrless Y_c$) – metodo esaustivo
 - $\hat{Y} > Y_c$ (corrente lenta)
Dovrebbe essere indotta da un profilo F1 a valle, che non può esistere perché non esiste, a valle, una causa che lo determini
 - $\hat{Y} < Y_c$ (corrente veloce)
Dovrebbe essere indotta da un profilo D3 a monte, che non può esistere perché non esiste, a monte, una causa che lo determini
 - $\hat{Y} = Y_c$ (profondità critica)
È compatibile con un D2 a monte e un F2 a valle: unica possibile
- ✓ Con cause perturbatrici a breve distanza può aversi $\hat{Y} \gtrless Y_c$

Tracciamento profili di moto perm.

- Condizioni al contorno ed effetti delle cause perturbatrici (c.p.) della corrente
 - Correnti lente (c.l.): c.c. da valle ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso monte solo in c.l.
 - Correnti veloci (c.v.): c.c. da monte ➡ una c.p. può far risentire i suoi effetti verso valle solo in c.v.
- Condizioni al contorno in sezioni di controllo (Q fissata)
 - Manufatti (esempio: paratoia piana in alveo indefinito a debole pendenza: $i_f < i_c$)
 - Paratoia non incide la corrente ($a > Y_u$) ➡ moto uniforme ovunque
 - Paratoia incide la corrente ($a < Y_u$) ➡ corrente a monte deve essere lenta, con $Y_m > Y_u$: profilo D1,



$$Y_m \text{ si ricava da } Q = \mu ab \sqrt{2g(Y_m - Y_v)}$$

- Efflusso libero: corrente a valle deve essere veloce perché influenzata da paratoia a monte ($Y_v = a C_c$): profilo D3
- Efflusso rigurgitato: corrente a valle deve essere lenta perché non influenzata da paratoia: Y_v determinata da cause a valle (alveo non "indefinito" se $Y_v \neq Y_u$)



Risalto idraulico

► Transizione con continuità per lo stato critico

- Possibile da corrente lenta a corrente veloce ($i_f < i_c \rightarrow i_f > i_c$)

✓ Y_c costituisce c.c. idonea per D2 a monte e F2 a valle

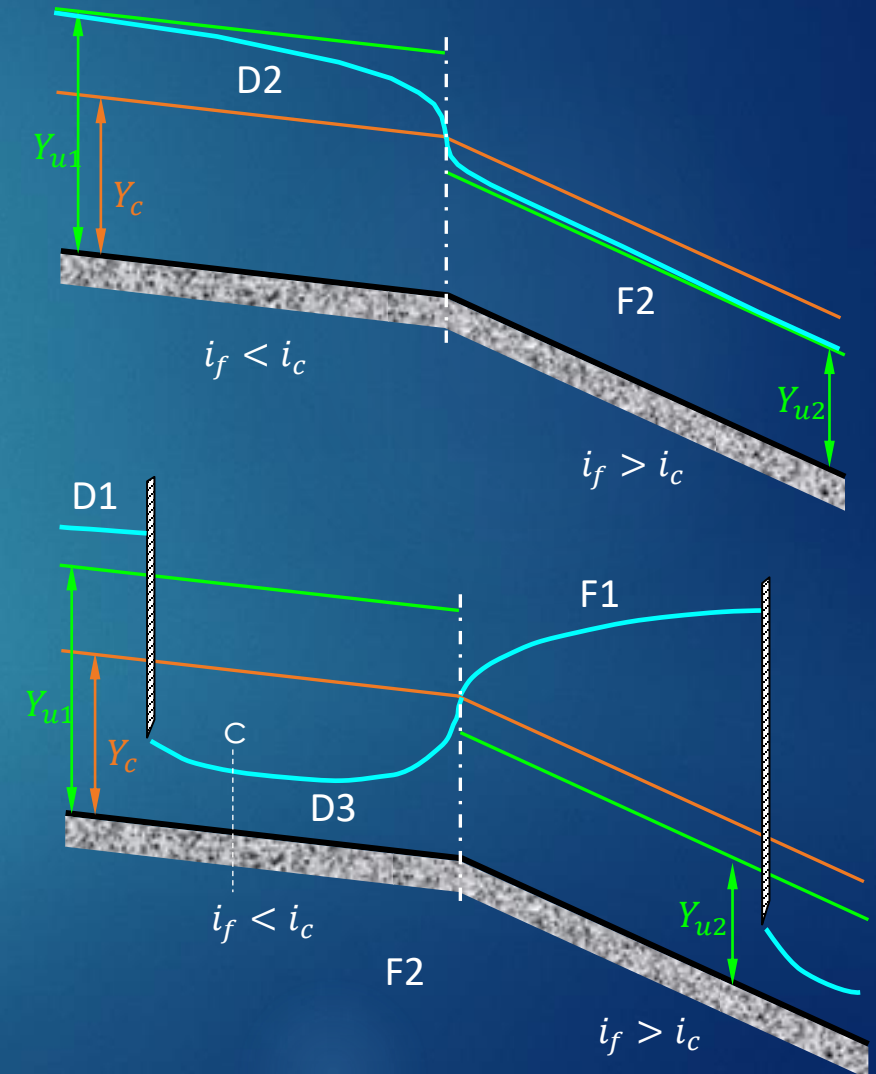
- È possibile transizione nel senso inverso ???

Ciò richiederebbe

- alvei $i_f < i_c \rightarrow i_f > i_c$
- D3 a monte, determinato da c.c. da monte (c.v.)
- F1 a valle, determinato da c.c. da valle (c.l.)
- i profili dovrebbero incontrarsi con Y_c su cambio pendenza
- ✓ trattasi di evento a *probabilità nulla*: le 2 condizioni per il D3 e l'F1 dovrebbero essere fissate appositamente

► Transizione da corrente veloce a corrente lenta

- In generale può avvenire soltanto con discontinuità
- La discontinuità prende il nome di *risalto idraulico*



Risalto idraulico

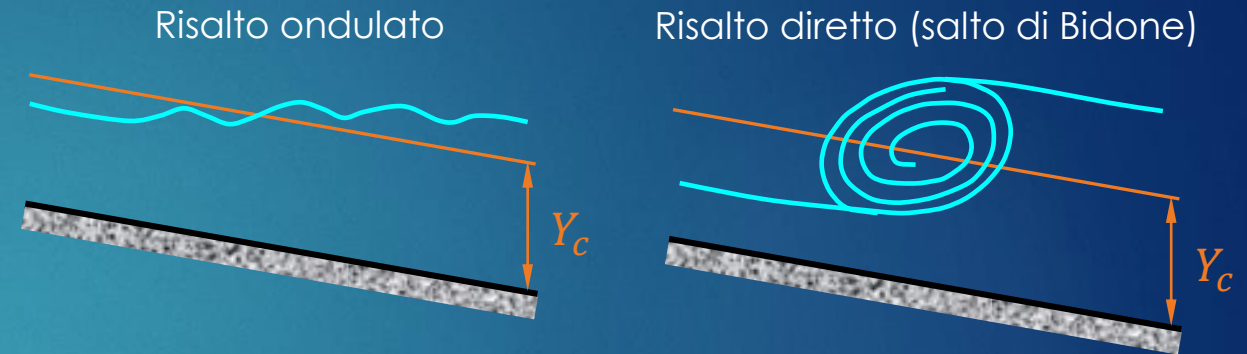
► Aspetto del risalto idraulico

(in ordine di Fr_{monte} crescente) $(Fr = \frac{U}{\sqrt{gY_m}})$

- Risalto ondulato
- Risalto ondulato con frangimento
- Risalto diretto (salto di Bidone)

✓ discontinuità nella soluzione dell'equazione del moto per le correnti

✓ Tratto di corrente non lineare ➡ studio mediante equazione globale del moto (bilancio di q.d.m.)



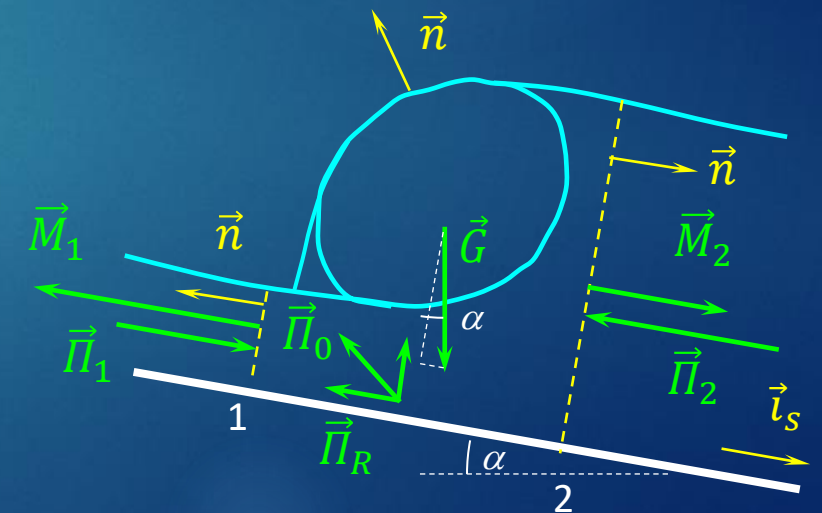
► Studio del risalto idraulico

- Volume di controllo delimitato dalle sezioni regolari più vicine
- Proiezione dell'equazione globale sull'asse della corrente

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}) \cdot \vec{i}_s$$

$$- \vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \quad - \vec{G} = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV$$

$$- \vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad - \vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$





Risalto idraulico

► Studio del risalto idraulico

- Volume di controllo delimitato dalle sezioni regolari più vicine
- Proiezione dell'equazione globale sull'asse della corrente

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}) \cdot \vec{i}_s$$

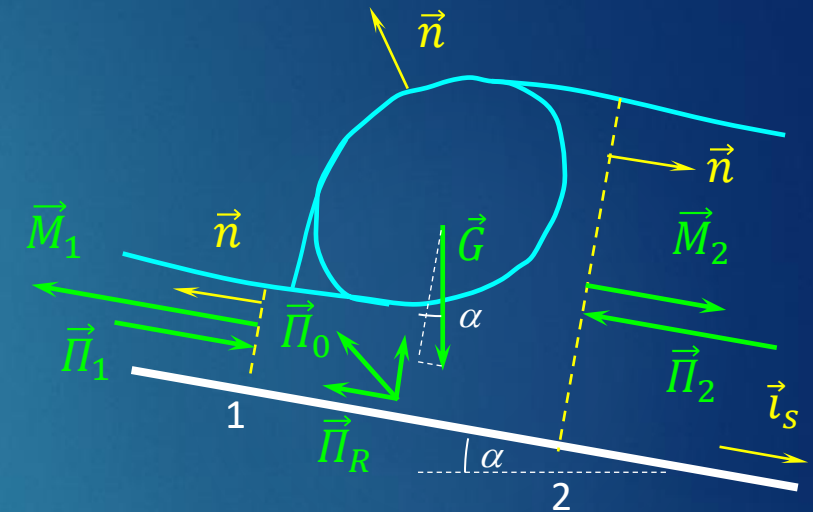
$$- \vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV = 0 \quad (\text{moto stazionario})$$

$$- \vec{M} \cdot \vec{i}_s = \vec{i}_s \cdot \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = -M_1 + M_2 = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1 + \beta \rho U_2^2 \Omega_2$$

$$- \vec{G} \cdot \vec{i}_s = \vec{i}_s \cdot \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV = G \sin \alpha$$

$$- \vec{\Pi} \cdot \vec{i}_s = \vec{i}_s \cdot \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS = \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_R = p_{G1} \Omega_1 - p_{G2} \Omega_2 - \Pi_R$$

- ✓ $G \sin \alpha$ piccolo per ipotesi piccole pendenze
- ✓ Π_R (resistenze al moto) piccolo per piccolo sviluppo in asse V_c
- ✓ $G \sin \alpha - \Pi_R \cong 0$ perché piccoli e di segno opposto
- ✓ $\beta \cong 1$ per regime turbolento



$$-\rho U_1^2 \Omega_1 + \rho U_2^2 \Omega_2 = p_{G1} \Omega_1 - p_{G2} \Omega_2$$

$$p_{G2} \Omega_2 + \rho U_2^2 \Omega_2 = p_{G1} \Omega_1 + \rho U_1^2 \Omega_1$$

$$S_2 = S_1$$

$$S = p_G \Omega + \rho U^2 \Omega$$

(spinta totale)

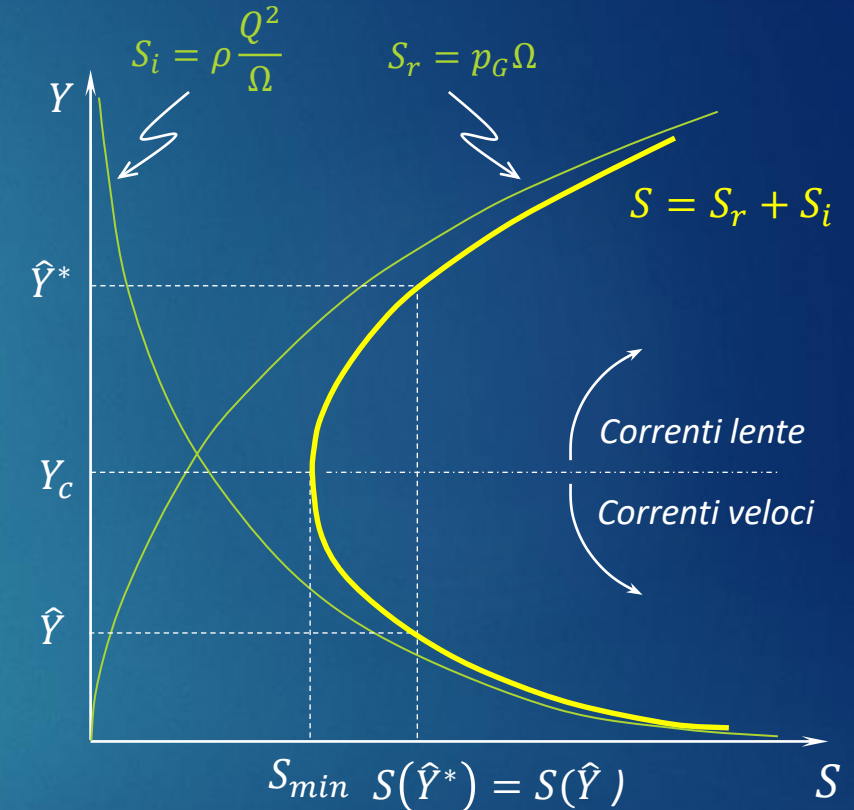


Risalto idraulico

► Spinta totale

$$S = p_G \Omega + \rho U^2 \Omega$$

- Somma di
 - Spinta idrostatica (forza reale): $p_G \Omega$
 - Flusso di quantità di moto (forza di inerzia): $\rho U^2 \Omega$
- Spinta totale nel moto stazionario ($Q = U\Omega = \text{cost}$)
 - $S = p_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = S(Y)$
 - Studio della funzione spinta totale
 - $Y \rightarrow 0 \longrightarrow p_G, \Omega \rightarrow 0 \longrightarrow \rho \frac{Q^2}{\Omega} \rightarrow \infty \longrightarrow S \rightarrow \infty$
 - $Y \rightarrow \infty \longrightarrow p_G, \Omega \rightarrow \infty \longrightarrow \rho \frac{Q^2}{\Omega} \rightarrow 0 \longrightarrow S \rightarrow \infty$
 - $S \rightarrow \infty$ agli estremi dell'intervallo di definizione
 \longrightarrow deve esistere un minimo relativo S_{min}
 - ✓ Si dimostra che $S = S_{min}$ per $Y = Y_c$

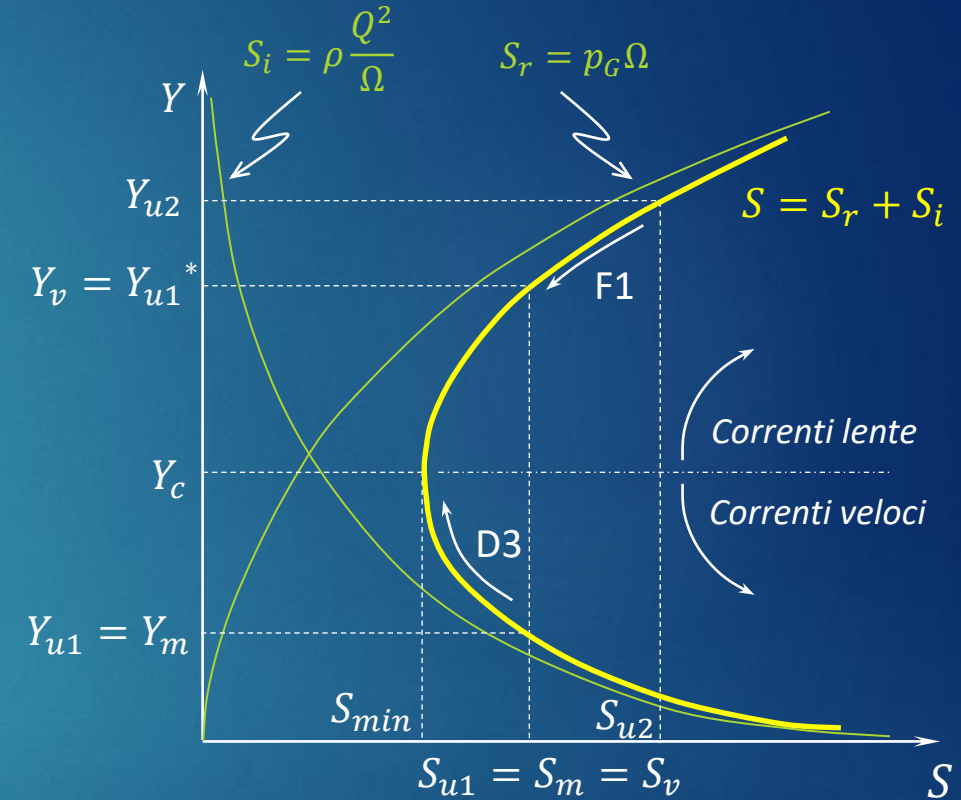
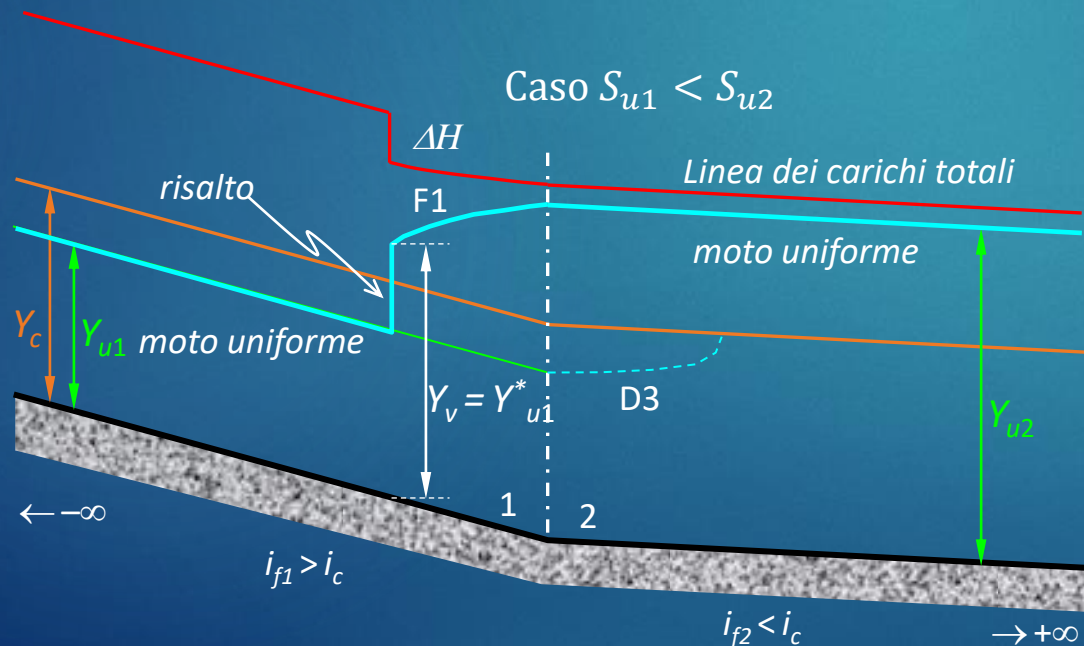


- Profondità coniugate: profondità alle quali corrisponde lo stesso valore di spinta totale
- ✓ Ai due estremi di un risalto si hanno profondità coniugate: $Y_m = Y_v^*$ ($Y_v = Y_m^*$)

Risalto idraulico

► Localizzazione del risalto

- Profondità nota a monte o a valle del risalto
 - ✓ In pratica sempre Y_u come da c.c. da $\pm\infty$
 - Determinazione diretta della Y_u^* (limite del profilo)
 - Esempio: risalto in alveo con cambio di pendenza ($i_{f1} > i_c$ tratto a monte, $i_{f2} < i_c$ tratto a valle)



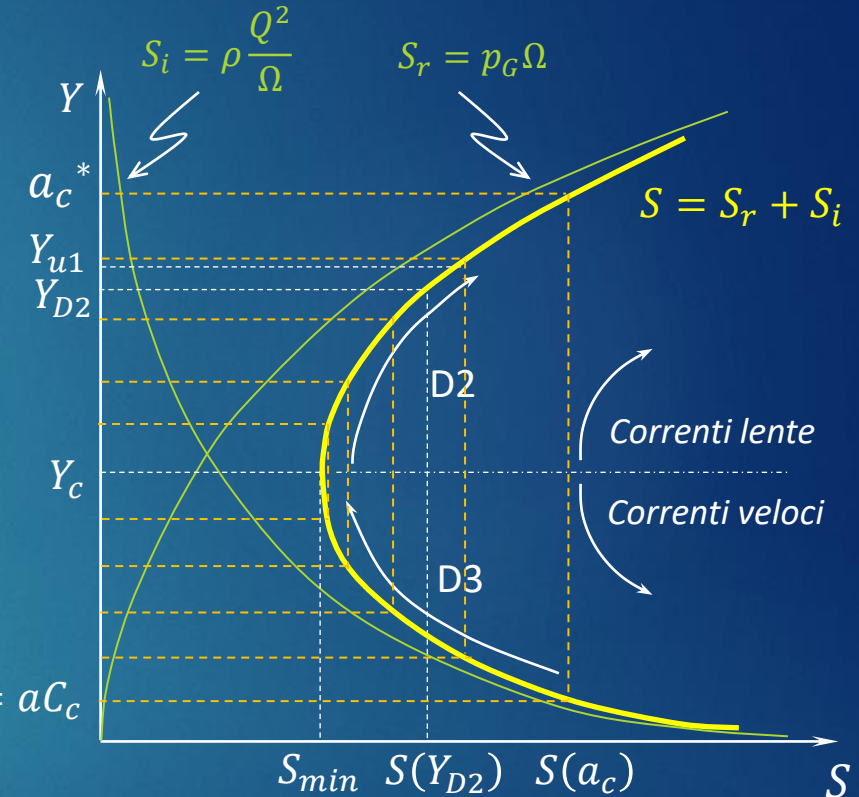
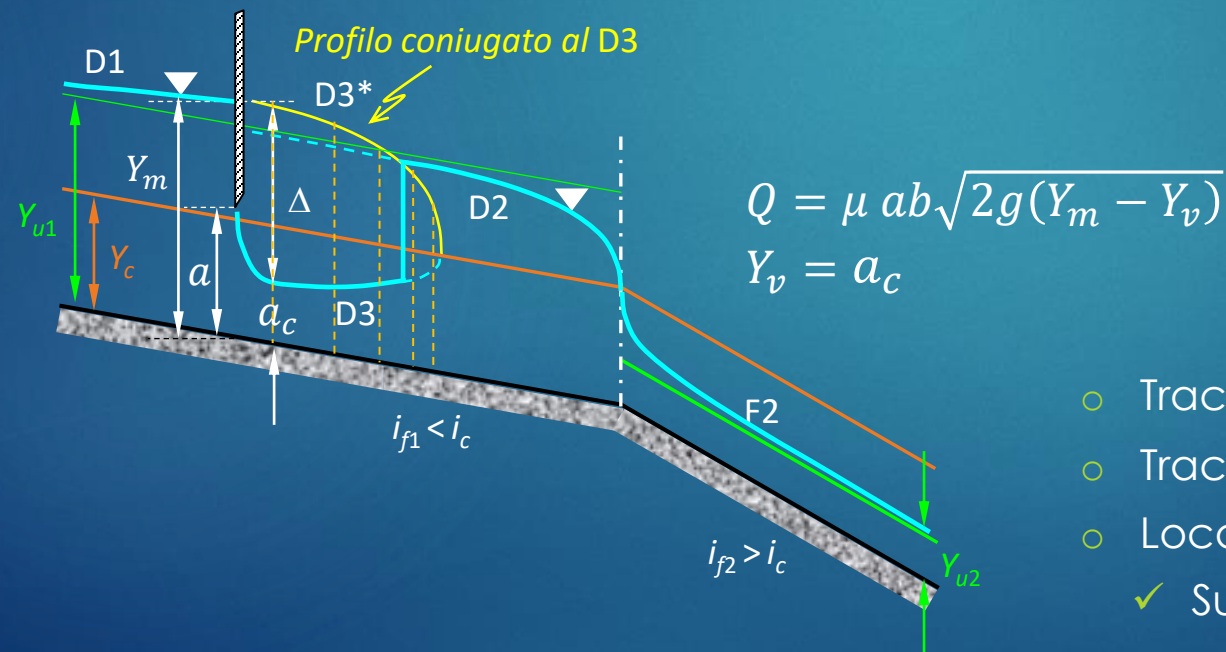
- In quale tratto si localizza il risalto ???
 - Calcolo spinte totali $S_{u1} = S(Y_{u1})$ e $S_{u2} = S(Y_{u2})$
 - $S_{u1} > S_{u2}$ ➡ risalto nel tratto a valle
 - $S_{u1} < S_{u2}$ ➡ risalto nel tratto a monte
- Tracciamento del profilo F1 fino a Y_{u1}^*



Risalto idraulico

► Localizzazione del risalto

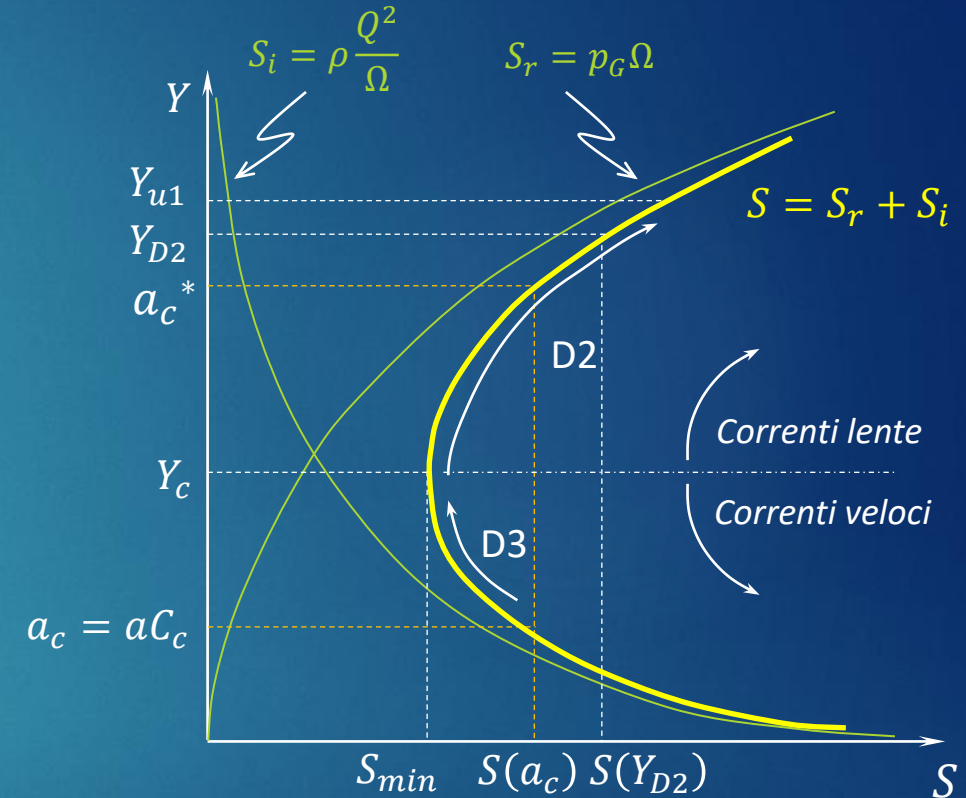
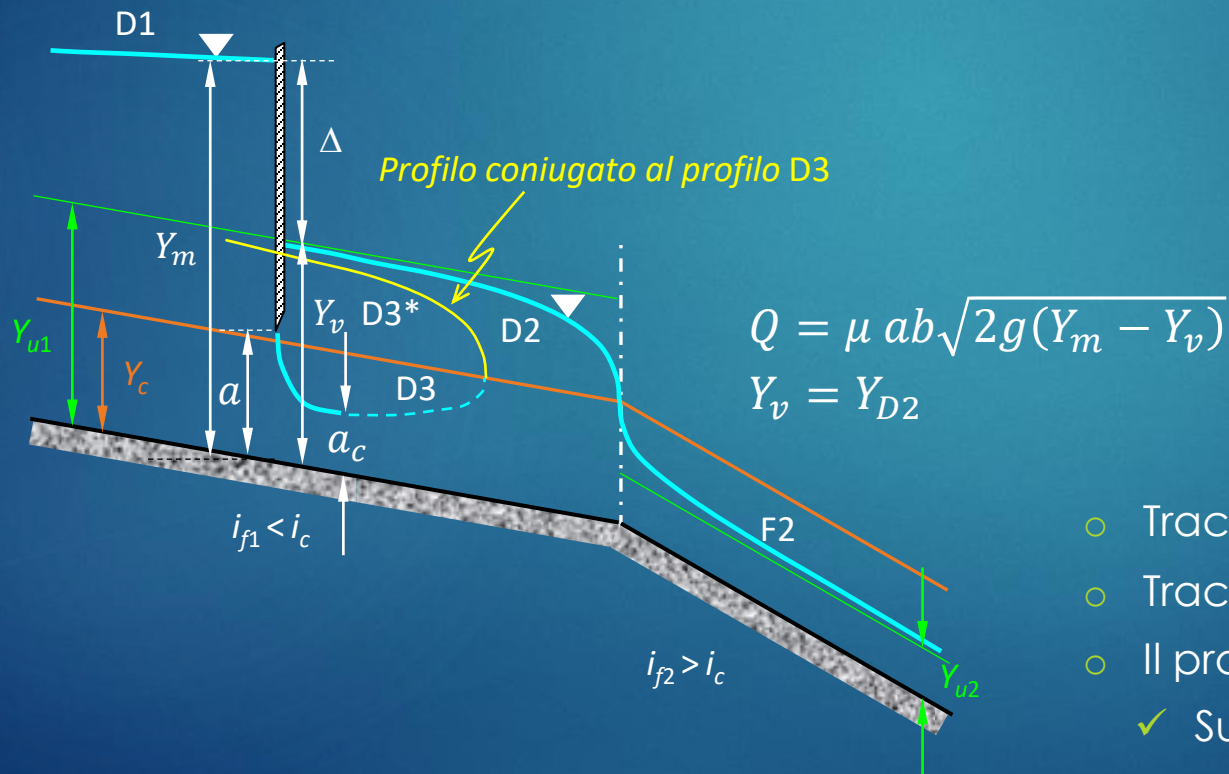
- Profondità incognita sia monte che a valle del risalto
 - Necessario tracciamento del *profilo coniugato*
 - Profilo coniugato a un profilo dato: profilo avente, sezione per sezione, profondità coniugata a quella del profilo dato
 - Esempio: risalto a valle di una paratoia in tratto "corto" a $i_f < i_c$



- Tracciamento dei profili D2 e D3 nel tratto a $i_f = i_{f1} < i_c$
- Tracciamento del profilo D3*, coniugato al profilo D3
- Localizzazione risalto in intersezione profili D3* e D2
- ✓ Sulla sezione contratta si verifica $S(a_c) > S(Y_{D2})$

Risalto idraulico

- ▶ Efflusso rigurgitato da una paratoia: assenza del risalto
 - Esempio: efflusso da una paratoia in tratto corto a $i_f < i_c$
 - Il profilo D3*, coniugato al D3, non interseca il D2



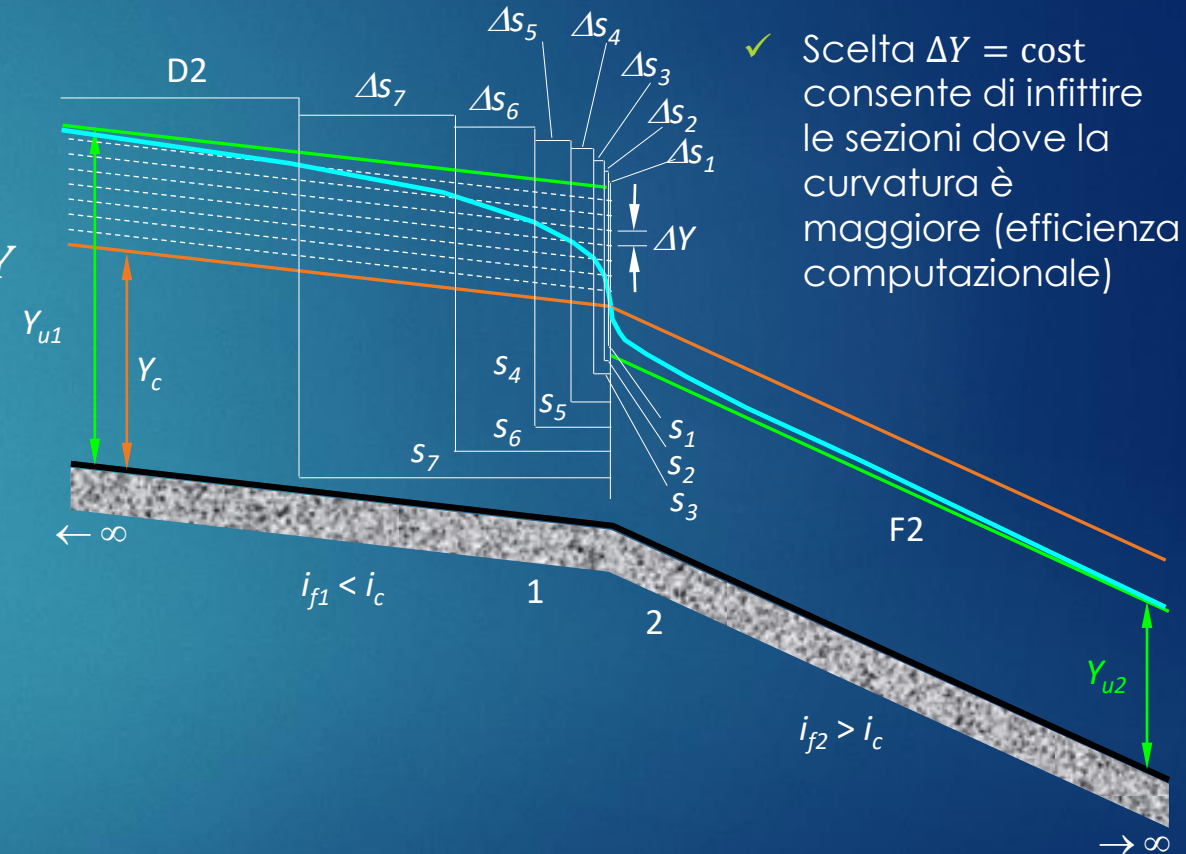
- Tracciamento dei profili D2 e D3 nel tratto a $i_f = i_{f1} < i_c$
- Tracciamento del profilo D3*, coniugato al profilo D3
- Il profilo D3* non interseca il profilo D2
- ✓ Sulla sezione contratta si verifica $S(a_c) < S(Y_{p2})$

Tracciamento dei profili di m.p.

► Integrazione numerica dell'equazione del profilo

$$\frac{dE}{ds} = i_f - j \longrightarrow \Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{i_f - j_{m_k}} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K$$

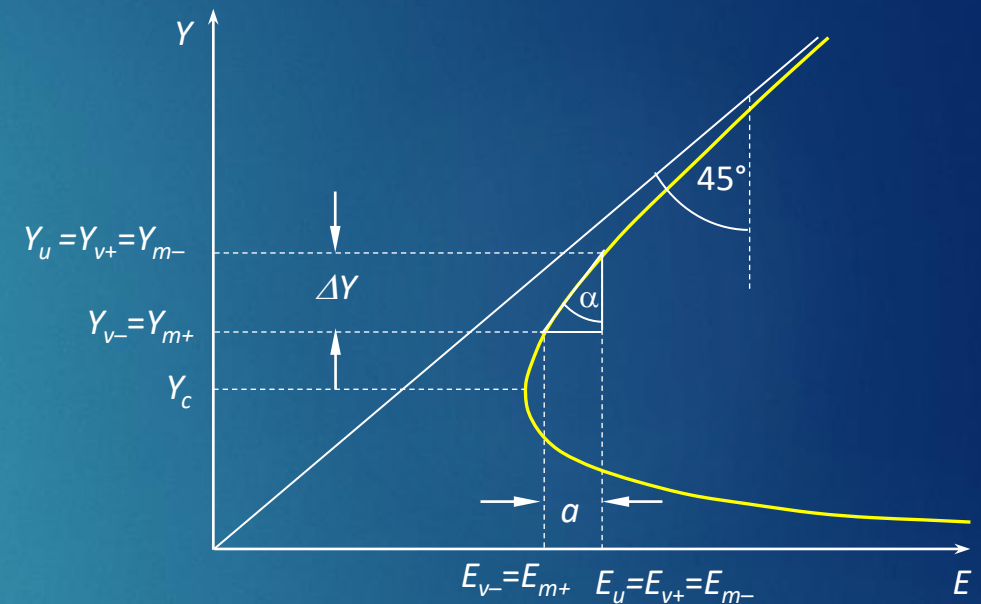
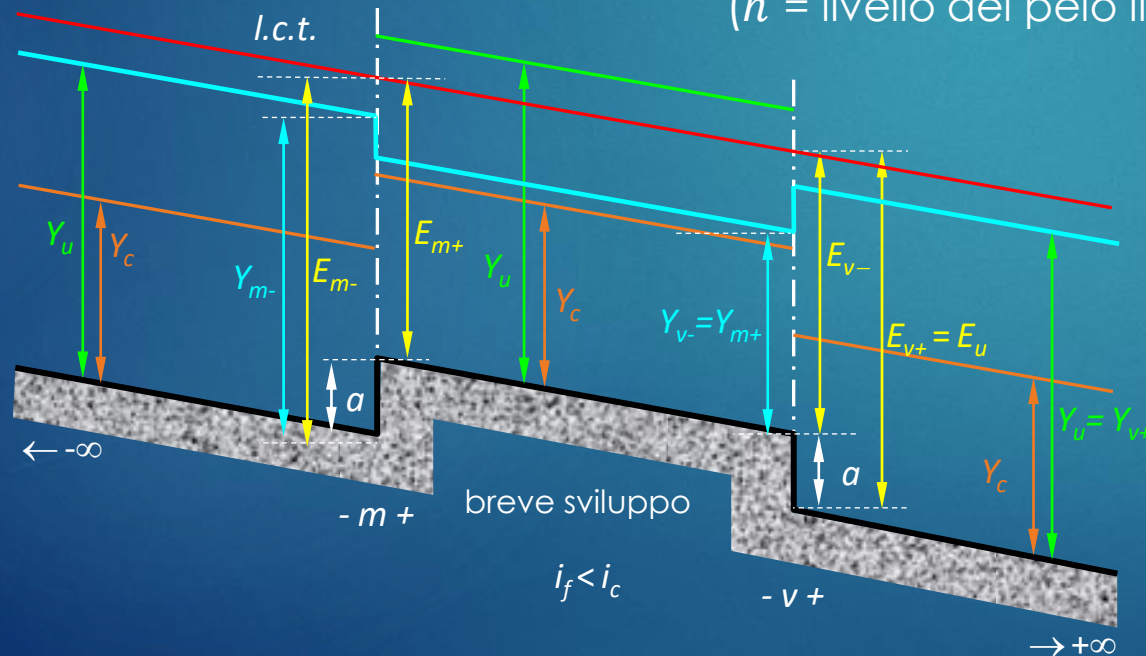
- $s_k = \sum_{n=1}^k \Delta s_n = s_{k-1} + \Delta s_k$; $Y_k = Y(s_k) = Y_0 + k\Delta Y$
- $\Delta Y = \frac{Y_{u1} - Y_c}{K}$ suddivisione dislivello profilo in K parti
- $Y_0 = Y_c$ (D2 in corrente lenta \longrightarrow c.c. da valle)
- $\Delta E_k = E_k - E_{k-1}$; $E_k = Y_k + \frac{Q^2}{2g\Omega_k^2}$; $\Omega_k = \Omega(Y_k)$
- $j = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} = \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2}$ con j_{m_k} esprimibile in vari modi:
 - $j_{m_k} = j(Y_{m_k})$; $Y_{m_k} = \frac{1}{2}(Y_k + Y_{k-1})$
 - $j_{m_k} = \frac{Q^2}{\chi_{m_k}^2 \Re_{m_k} \Omega_{m_k}^2}$; $\vartheta_{m_k} = \frac{1}{2}(\vartheta_k + \vartheta_{k-1})$; $\vartheta_k = \chi(Y_k), \Re(Y_k), \Omega(Y_k)$
 - $j_{m_k} = \frac{1}{2}(j_k + j_{k-1})$; $j_k = j(Y_k)$





Passaggio su una soglia di fondo

- Alveo indefinito a debole pendenza ($i_f < i_c$)
 - Condizioni al contorno da valle: $Y_u = Y_{v+}$ ($E_u = E_{v+}$)
 - $Y_{v-} = ?$
 - Ipotesi perdite di carico localizzate trascurabili
 - $E_{v-} = E_{v+} - a \longrightarrow h_{v-} < h_{v+}$ ($\alpha < 45^\circ \longrightarrow \Delta Y > a$)
- (h = livello del pelo libero)

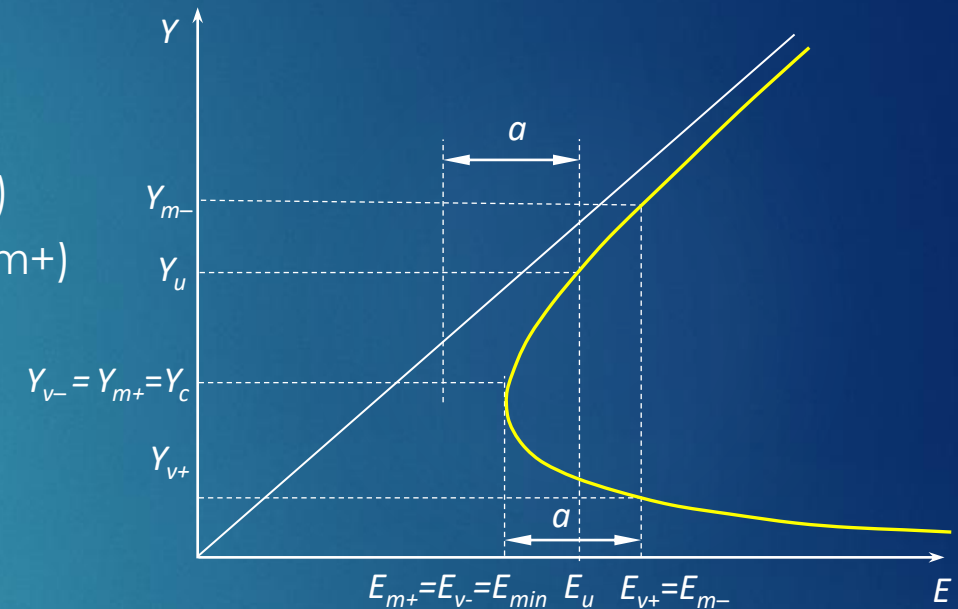
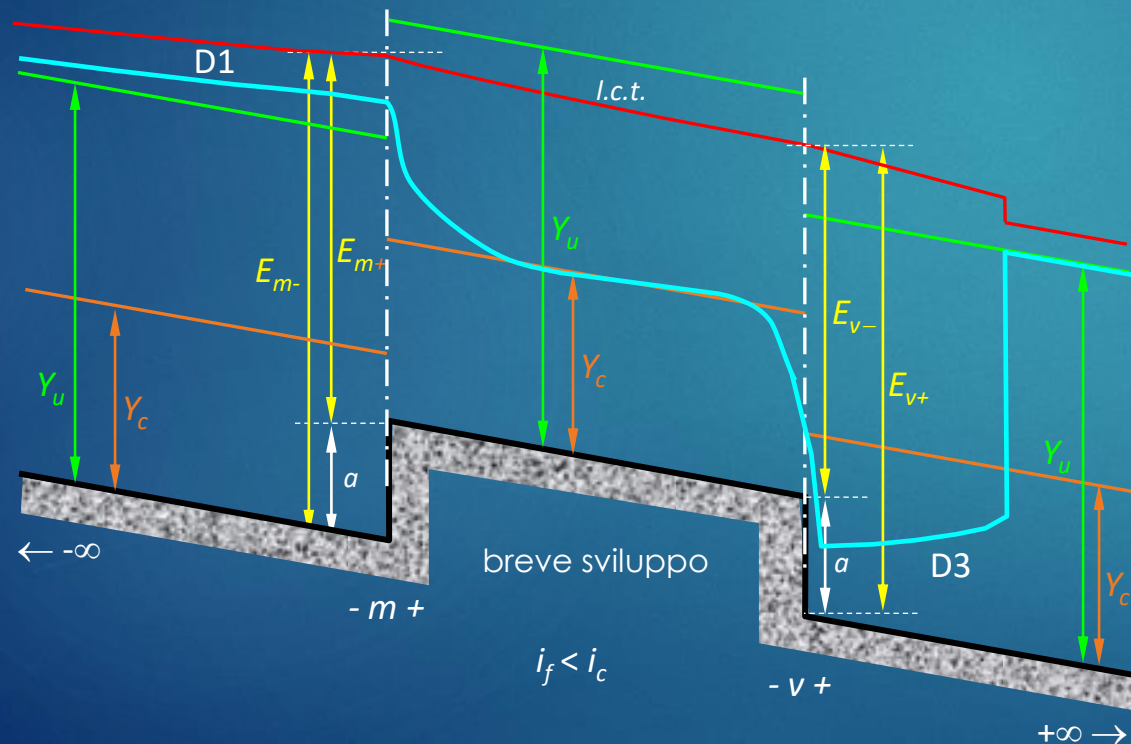


- $E_{v-} \geq E_{min}$
 - Y_{v-} da leggere nel ramo delle correnti lente
 - $Y_{m+} = Y_{v-}$ ($E_{m+} = E_{v-}$) (soglia breve sviluppo)
 - $E_{m-} = E_{m+} + a \longrightarrow Y_{m-} = Y_u$
- $E_{v-} < E_{min}$
 - Condizioni incompatibili con la portata Q

Passaggio su una soglia di fondo

► Alveo indefinito a debole pendenza ($i_f < i_c$)

- $E_{v-} < E_{min}$ assumendo condizioni di moto uniforme da valle
 - Condizioni da valle incompatibili con la portata Q ($Y_{v+} \neq Y_u$)
 - Q fluisce con energia minima (E_{min} , Y_c) sulla soglia (sezz. $v-$, $m+$)

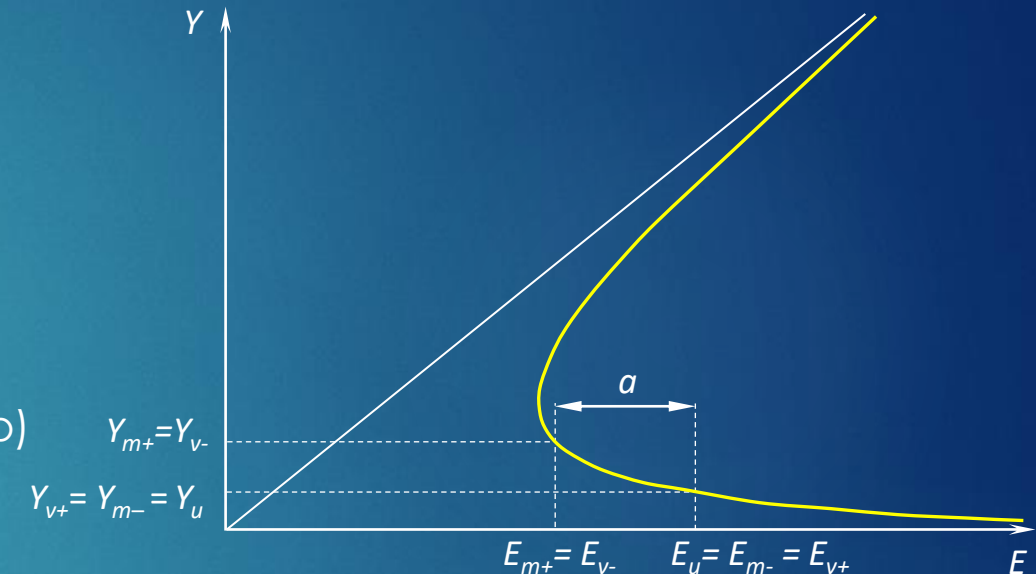
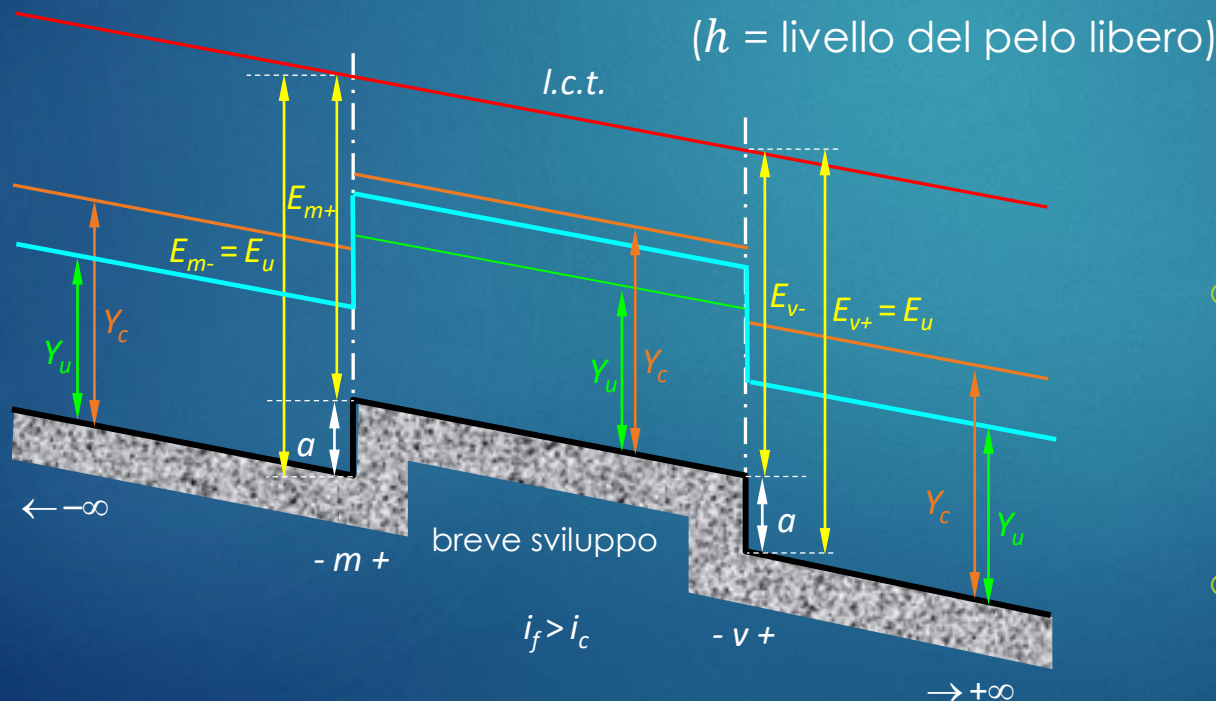


- Transizione per lo stato critico sulla soglia
 - $E_{v-} = E_{m+} = E_{min}$ ($Y_{v-} = Y_{m+} = Y_c$)
 - $E_{m-} = E_{v+} = E_{min} + a$
 - $Y_{v+} < Y_c$ da ramo correnti veloci ➡ D3
 - Risalto riporta a moto uniforme a valle
 - $Y_{m-} > Y_u$ da ramo correnti lente ➡ D1



Passaggio su una soglia di fondo

- ▶ Alveo indefinito a forte pendenza ($i_f > i_c$)
 - Condizioni al contorno da monte: $Y_u = Y_{m-}$ ($E_u = E_{m-}$)
 - $Y_{m+} = ?$
 - Ipotesi perdite di carico localizzate trascurabili
 - $E_{m+} = E_{m-} - a \implies Y_{m+} > Y_{m-} \implies h_{m+} > h_{m-}$

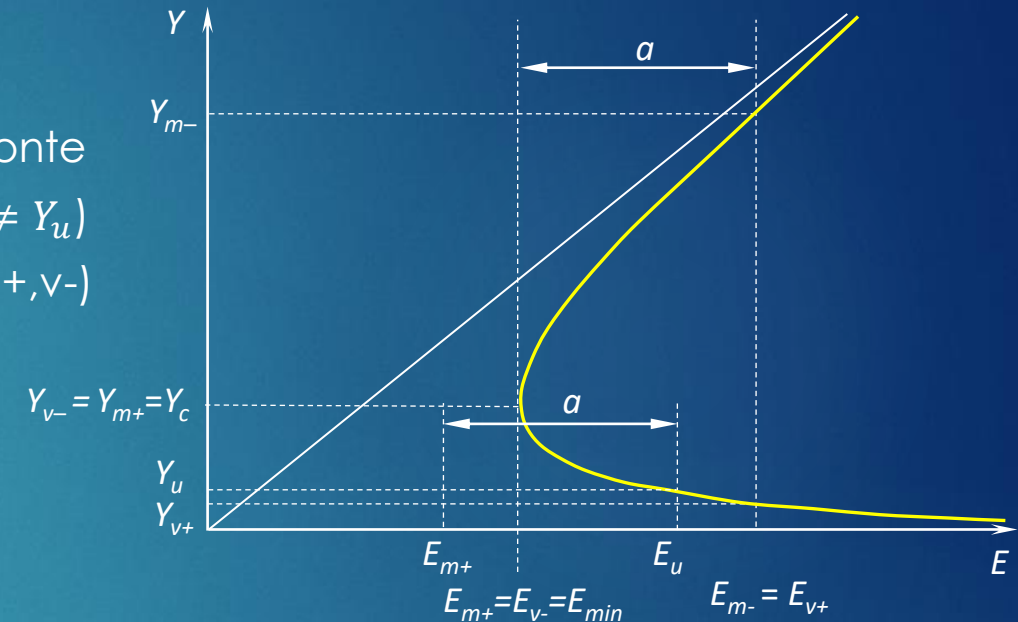
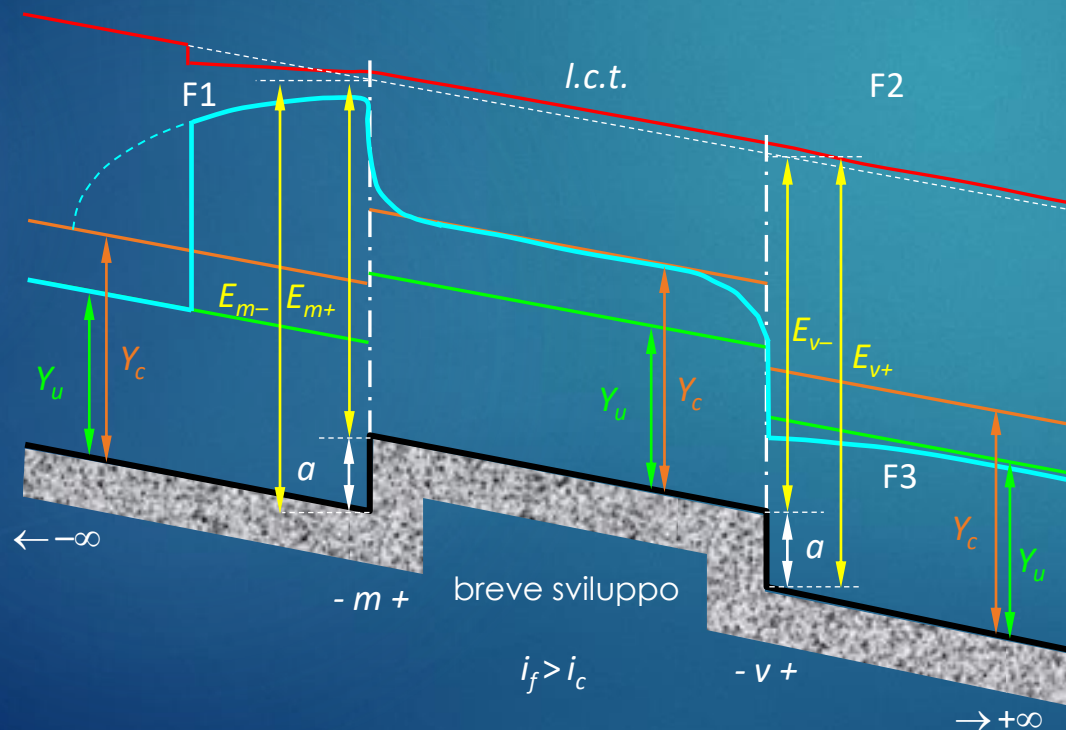


- $E_{m+} \geq E_{min}$
 - Y_{m+} da leggere nel ramo delle correnti veloci
 - $Y_{v-} = Y_{m+}$ ($E_{v-} = E_{m+}$) (soglia breve sviluppo)
 - $E_{v+} = E_{v-} + a \implies Y_{v+} = Y_u$
- $E_{m+} < E_{min}$
 - Condizioni incompatibili con la portata Q

Passaggio su una soglia di fondo

► Alveo indefinito a forte pendenza ($i_f > i_c$)

- $E_{m+} < E_{min}$ assumendo condizioni di moto uniforme da monte
 - Condizioni da monte incompatibili con portata Q ($Y_{m-} \neq Y_u$)
 - Q fluisce con energia minima (E_{min} , Y_c) su soglia (sezz. $m+, v-$)



- Transizione per lo stato critico sulla soglia
 - $E_{m+} = E_{v-} = E_{min}$ ($Y_{m+} = Y_{v-} = Y_c$)
 - $E_{m-} = E_{v+} = E_{min} + a$
 - $Y_{v+} < Y_u$ da ramo correnti veloci \rightarrow F3
 - $Y_{m-} > Y_c$ da ramo correnti lente \rightarrow F1
- Risalto riporta a moto uniforme a monte

Stramazzo a larga soglia

► Soglia tracimabile con transizione per lo stato critico

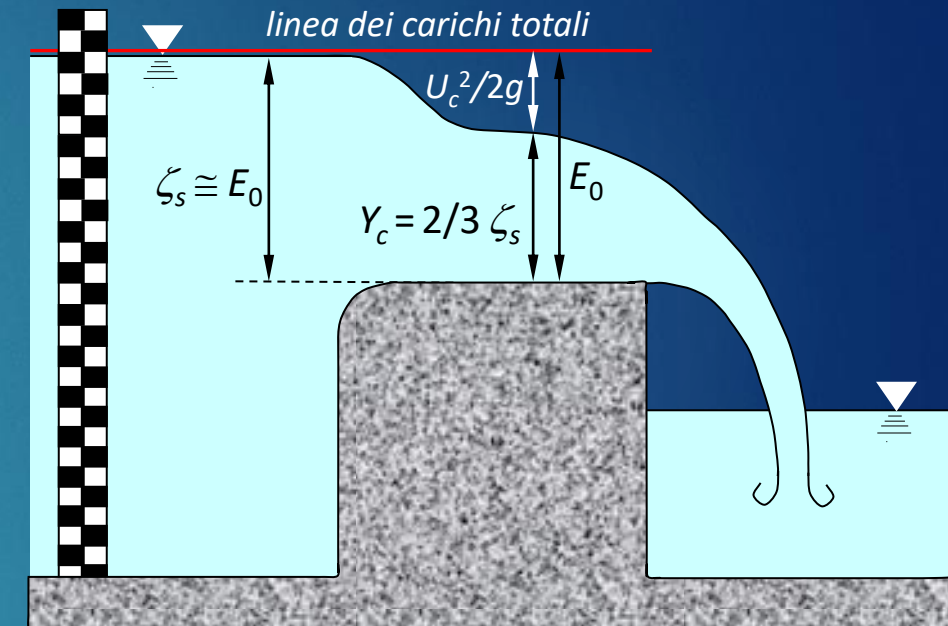
- Utilizzato per la misura della portata nei canali
- Ipotesi
 - alveo a sezione rettangolare (no contrazione laterale)
 - soglia \equiv piano di riferimento
 - velocità di arrivo trascurabile
 - perdite localizzate trascurabili all'estremo di monte
 - altezza soglia sufficiente a indurre transizione per stato critico
 - $Y = Y_c = \frac{2}{3} E_0$ sulla soglia

$$\zeta_s \cong E_0 = Y_c + \frac{U_c^2}{2g} \cong \frac{2}{3} \zeta_s + \frac{U_c^2}{2g} \longrightarrow U_c = \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}}$$

$$Q = U_c \Omega_c = b Y_c \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3} \zeta_s \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3\sqrt{3}} \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s}$$

$$Q = \mu b \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385$$

- ✓ La portata dipende solo da condizioni a monte (semimodulo)



- ✓ $\mu = 0,385$ inferiore a $\mu = 0,4$ per stramazzo Bazin

- ✓ Preferibile disporre stramazzo in alveo a $i_f < i_c$

- In alveo a $i_f > i_c$ misura del carico disturbata da turbolenza generata nel risalto a monte



Restringimento di sezione

► Canale a sezione rettangolare a debole pendenza ($i_f < i_c$)

- Condizioni al contorno da valle: $Y_u = Y_{v+}$ ($E_u = E_{v+}$)
- $Y_{v-} = ?$
 - Ipotesi perdite di carico localizzate trascurabili $\Rightarrow E_{v-} = E_{v+} = E_u$
 - ✓ stessa curva portate specifiche $q = Q/b$ a $E = \text{cost}$

$$Q = bY\sqrt{2g(E_0 - Y)} \Rightarrow q = \frac{Q}{b} = Y\sqrt{2g(E_0 - Y)}$$

$$- \frac{Q}{b_r} = q_r > q = \frac{Q}{b}$$

$$\text{► } q_r < q_{\max} \Rightarrow Y_{v-} < Y_{v+} \text{ (ramo correnti lente)}$$

$$\text{○ breve sviluppo} \Rightarrow Y_{m+} = Y_{v-}$$

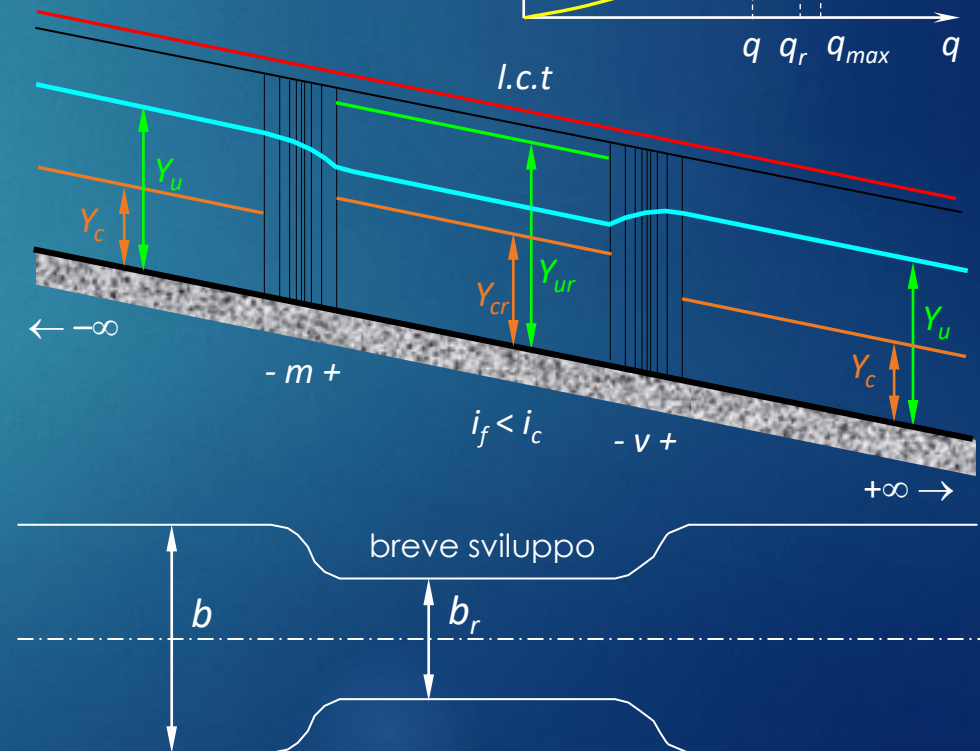
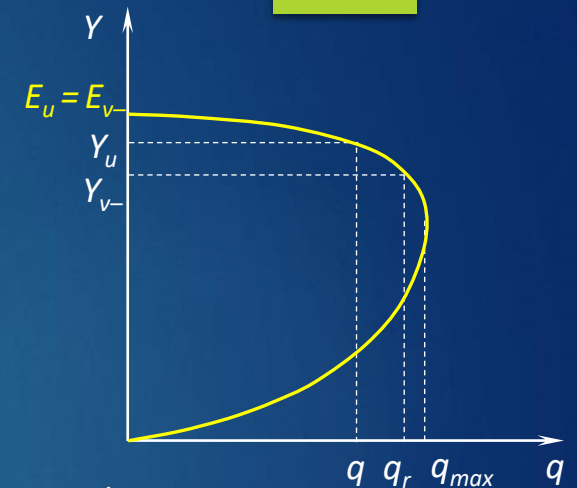
$$E_{m-} = E_{m+} = E_{v-} = E_{v+} = E_u \Rightarrow Y_{m-} = Y_u$$

$$\text{○ ampio sviluppo} \Rightarrow \text{c.c. per tracciamento profilo D2}$$

$$E_{v-} < E_{m+} = E_{m-} \Rightarrow Y_{m+} < Y_{m-} ; Y_{m-} > Y_u$$

$$\text{► } q_r > q_{\max} : \text{portata specifica incompatibile con il carico } E_{v+}$$

✓ trattazione estendibile ad alvei di sezione qualunque





Restringimento di sezione

► Canale a sezione rettangolare a debole pendenza ($i_f < i_c$)

- $q_r = \frac{Q}{b_r} > q_{max}$ \longrightarrow portata specifica non compatibile con il carico E_{v+}

- Nella strizione deve fluire la portata specifica q_r essendo imposta Q
- la q_r fluisce con l'energia minima necessaria (stato critico)

$E_{m+} = E_{v-} > E_u$ per la quale q_r sia la massima possibile

- Per sezione rettangolare $Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q_{max}^2}{g b^2}} = \sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}}$ da cui

$$E_{m+} = E_{v-} = \frac{3}{2} Y_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}}; \quad Y_{v-} = Y_{m+} = Y_c = \frac{2}{3} E_{v-} = \frac{2}{3} E_{m+}$$

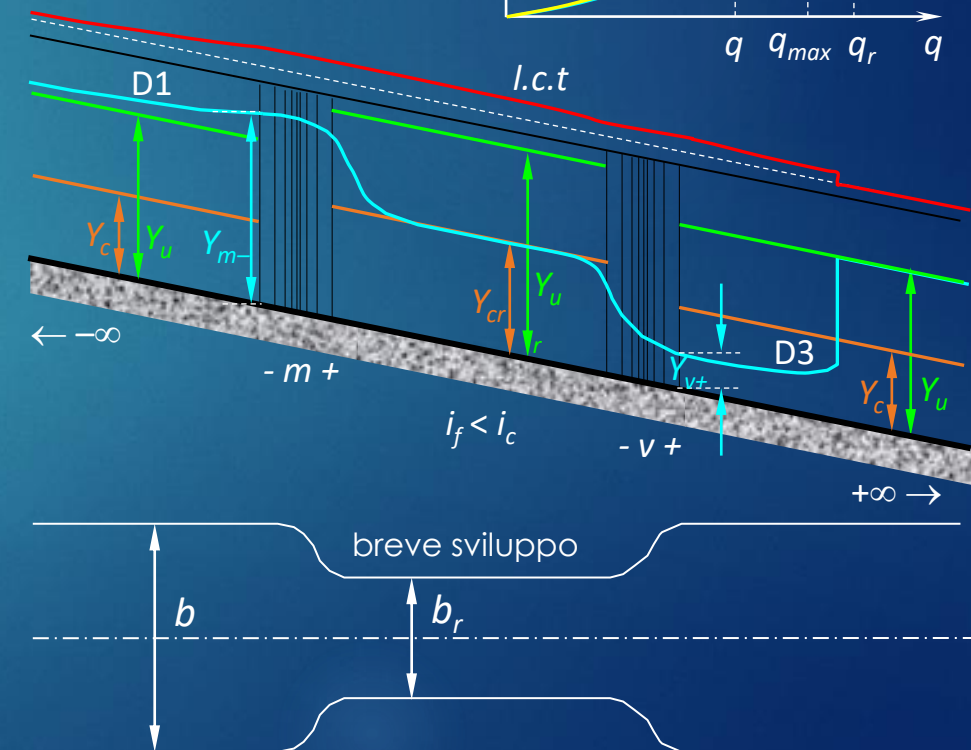
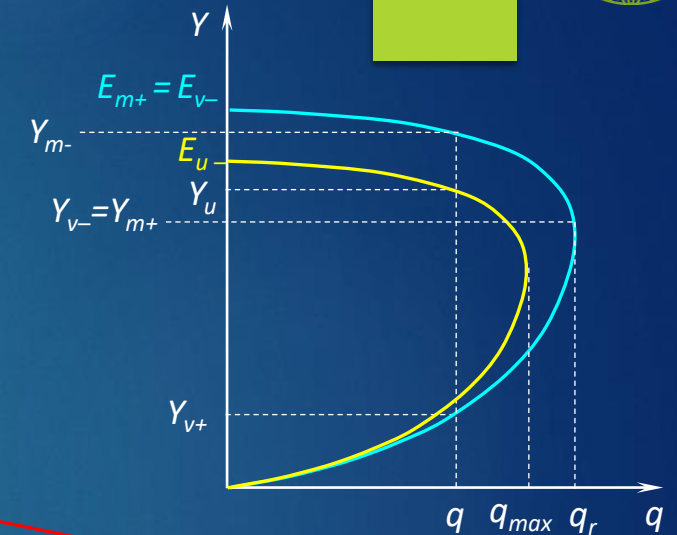
- $E_{m-} = E_{m+} \longrightarrow Y_{m-}$ da ramo correnti lente curva $E = E_{m+}$

- $Y_{m-} > Y_u$ \longrightarrow profilo D1 a monte del restringimento

- $E_{v+} = E_{v-} \longrightarrow Y_{v+}$ da ramo correnti veloci curva $E = E_{m+}$

- $Y_{v+} < Y_c$ \longrightarrow profilo D3 a valle del restringimento

- Un risalto riporta al moto uniforme a valle (c.c. da valle)





Restringimento di sezione

► Canale a sezione rettangolare a forte pendenza ($i_f > i_c$)

- Condizioni al contorno da monte: $Y_u = Y_{m-}$ ($E_u = E_{m-}$)
- $Y_{m+} = ?$
 - Ipotesi perdite di carico localizzate trascurabili $\Rightarrow E_{m+} = E_{m-} = E_u$
 - ✓ stessa curva portate specifiche $q = Q/b$ a $E = \text{cost}$

$$Q = bY\sqrt{2g(E_0 - Y)} \Rightarrow q = \frac{Q}{b} = Y\sqrt{2g(E_0 - Y)}$$

$$- \frac{q}{b_r} = q_r > q = \frac{q}{b}$$

- $q_r < q_{max} \Rightarrow Y_{m+} > Y_{m-}$ (ramo correnti veloci)

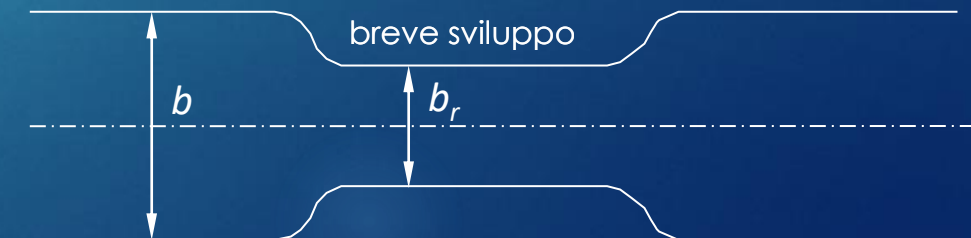
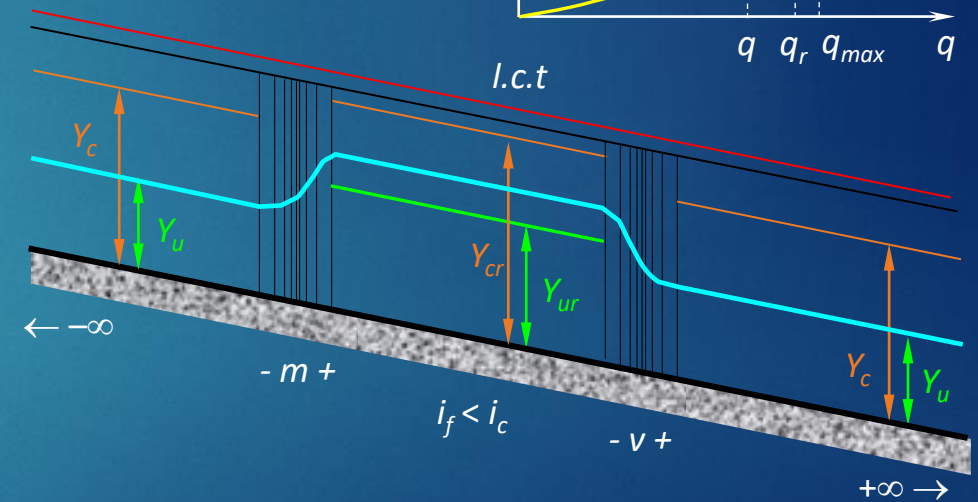
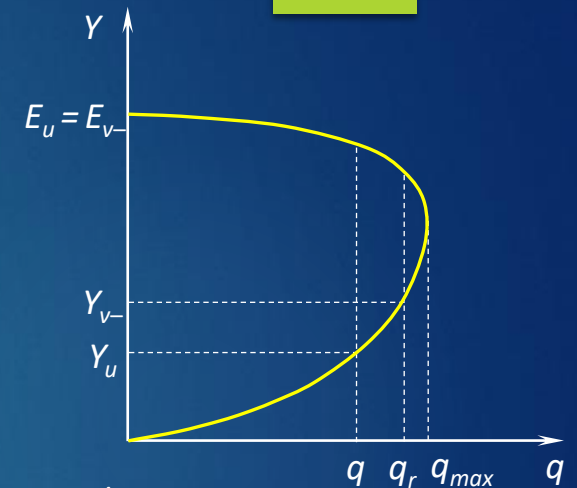
- breve sviluppo $\Rightarrow Y_{v-} = Y_{m+}$

$$E_{v+} = E_{v-} = E_{m+} = E_{m-} = E_u \Rightarrow Y_{v+} = Y_u$$

- ampio sviluppo \Rightarrow c.c. per tracciamento profilo F2

$$E_{m+} > E_{v-} = E_{v+} \Rightarrow Y_{v+} < Y_{v-} ; Y_{v+} < Y_u$$

- $q_r > q_{max}$: portata specifica incompatibile con carico E_{m-}





Restringimento di sezione

► Canale a sezione rettangolare a forte pendenza ($i_f > i_c$)

- $q_r = \frac{Q}{b_r} > q_{max}$ \longrightarrow portata specifica non compatibile con il carico E_{v+}

- Nella strizione deve fluire la portata specifica q_r essendo imposta Q
- la q_r fluisce con l'energia minima necessaria (stato critico)

$E_{m+} = E_{v-} > E_u$ per la quale q_r sia la massima possibile

- Per sezione rettangolare $Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q_{max}^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}}$ da cui

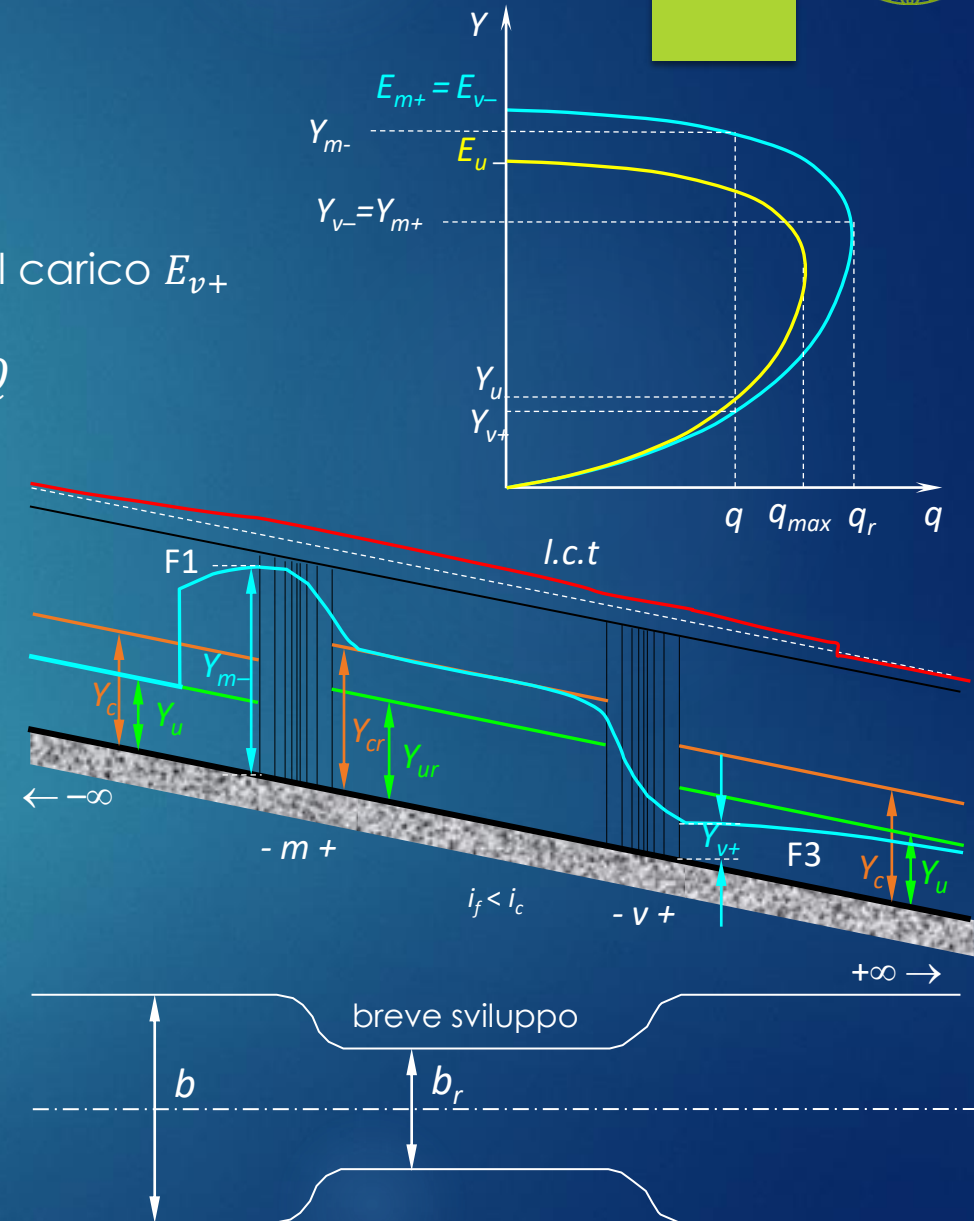
- $E_{m+} = E_{v-} = \frac{3}{2}Y_c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q_{max}^2}{g}}; \quad Y_{v-} = Y_{m+} = Y_c = \frac{2}{3}E_{v-} = \frac{2}{3}E_{m+}$

- $E_{m-} = E_{m+} \longrightarrow Y_{m-}$ da ramo correnti lente curva $E = E_{m+}$

- $Y_{m-} > Y_u \longrightarrow$ profilo F1 a monte del restringimento
- Un risalto riporta al moto uniforme a monte (c.c. da monte)

- $E_{v+} = E_{v-} \longrightarrow Y_{v+}$ da ramo correnti veloci curva $E = E_{v-}$

- $Y_{v+} < Y_u \longrightarrow$ profilo F3 a valle del restringimento



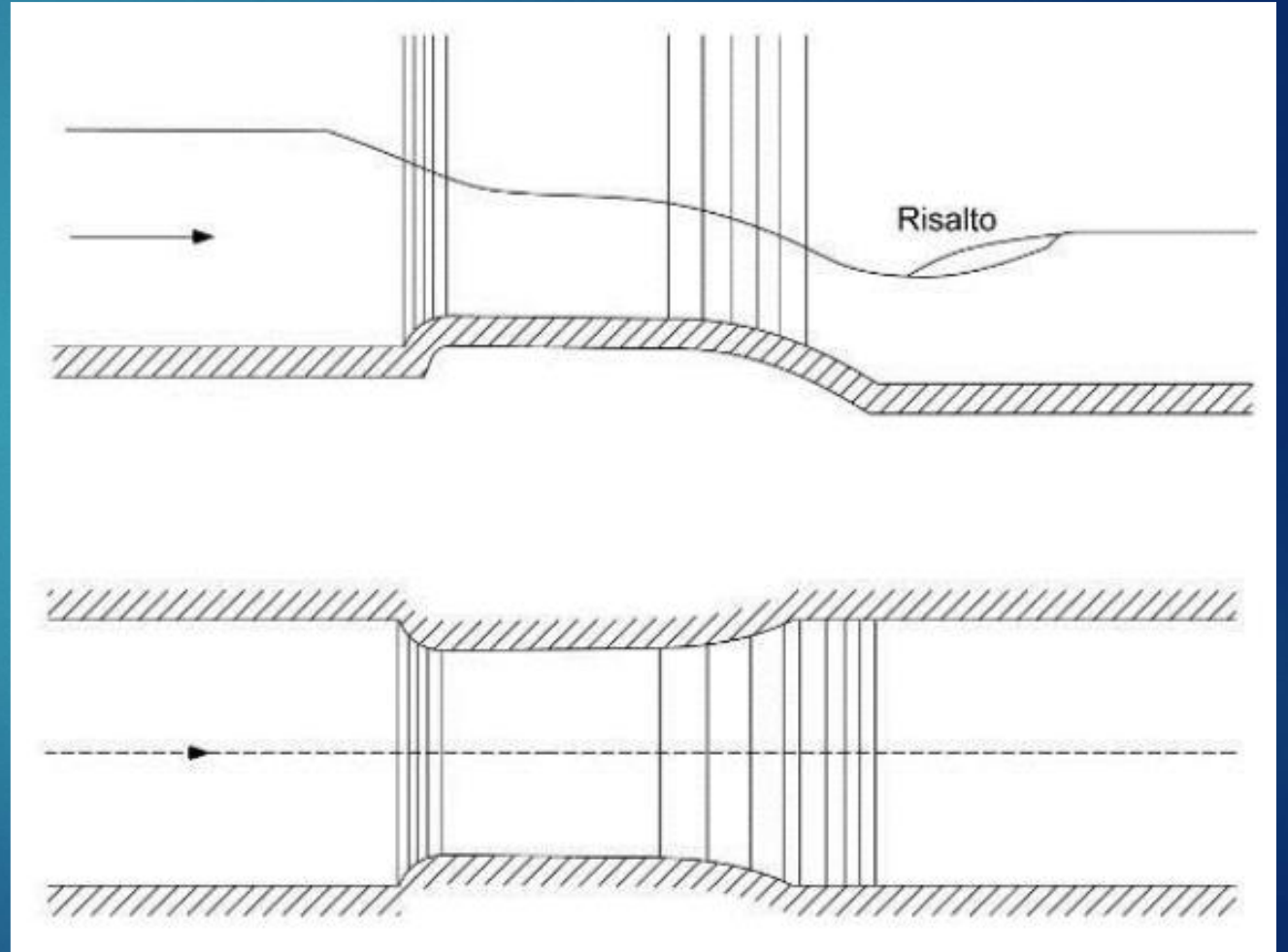
Modellatore a risalto

► Descrizione

Strumento di misura delle portate basato sulla transizione per lo stato critico indotta combinando il restringimento della sezione con il sovrizzo del fondo (talora assente)

► Caratteristiche

- Semimodulo (la misura di portata dipende soltanto dal livello a monte)
 - ✓ come per stramazzo a larga soglia
- Il modesto (o assente) sovrizzo del fondo lo rende adatto in presenza di solidi sospesi (p.es. impianti di depurazione, reti irrigue, bonifiche) per le sue proprietà autopulenti



Preso da un serbatoio

► Alveo indefinito a debole pendenza ($i_f = i_{f1} < i_c$)

- Perdite di carico trascurabili all'imbocco ➡

- Carico specifico E_0 prescritto in sezione 0 canale
- Coppie $Y - Q$ possibili rappresentate dalla curva

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$$

- Alveo indefinito, $i_f < i_c$ ➡ c.c. da valle (Y_u)

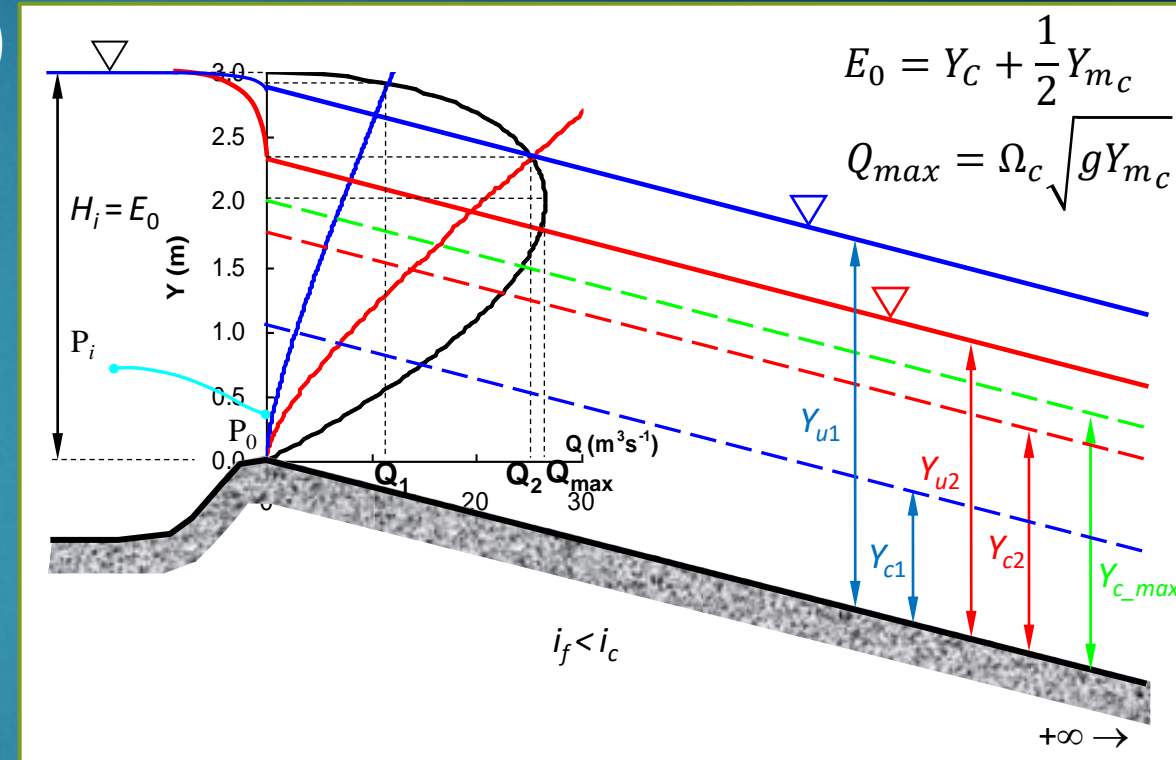
- Moto uniforme fino all'imbocco del canale

- Q, Y_u da intersezione curva Q a $E_0 = \text{cost}$ e scala delle portate di moto uniforme

$$Q(Y) = \chi \Omega \sqrt{\mathfrak{R} i_f} \quad \text{➡} \quad Q_1, Y_{u1} \quad (\text{curve colore blu})$$

► Caso $i_f = i_{f2} < i_c$ con $i_{f2} > i_{f1}$ (curve colore rosso)

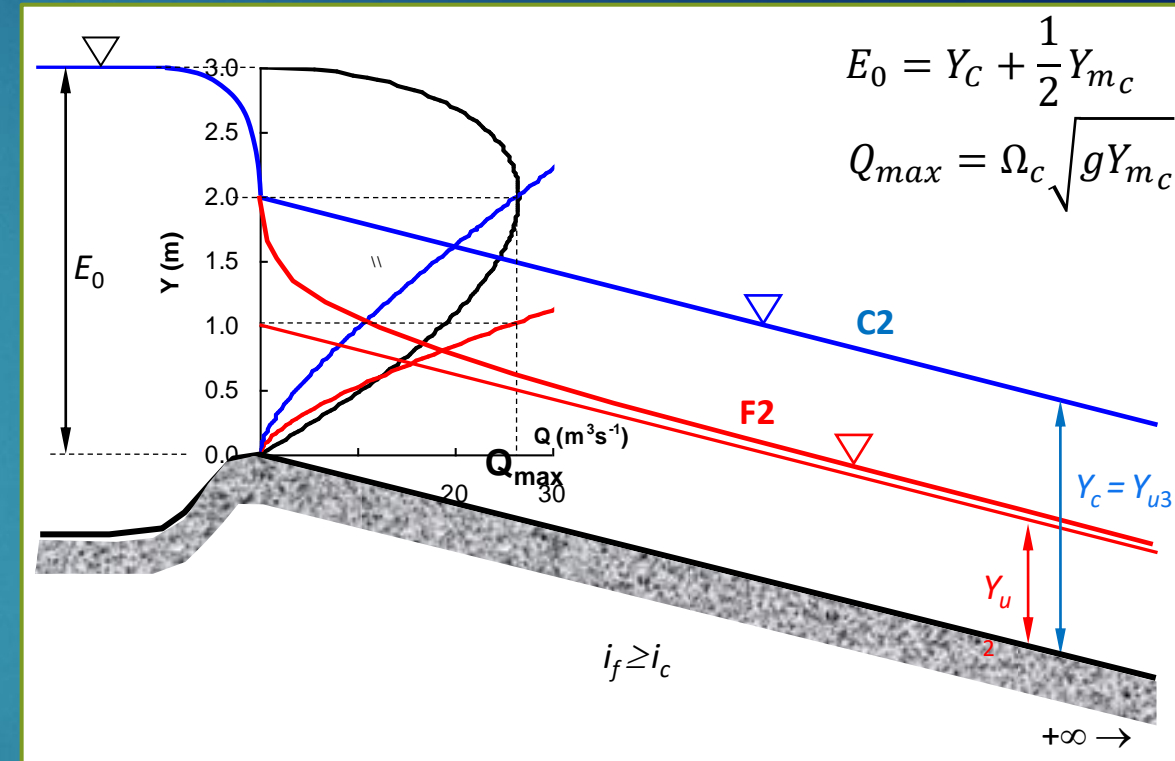
- Curva $Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$ invariata
- Q di moto uniforme maggiori a parità di profondità



- $Q_2 > Q_1$; $Y_{u2} < Y_{u1}$
- ✓ Portata crescente con la pendenza

Preso da un serbatoio

- ▶ Alveo indefinito a pendenza critica ($i_f = i_{f3} = i_c$)
 - Curva $Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$ invariata
 - $Q = Q_{max}$; $Y = Y_u = Y_c$ (profilo C2, colore blu)
- ▶ Alveo a forte pendenza ($i_f = i_{f4} > i_c$) (colore rosso)
 - Curva $Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$ invariata
 - La corrente non risente più di c.c. da valle
 - La scala delle portate di moto uniforme non determina più la portata estratta
 - $Q = Q_{max}$; $Y = Y_c$ in sezione di imbocco canale
 - Y_c c.c. da monte idonea per profilo F2
 - Y_u da scala delle portate per $Q = Q_{max}$
 - Aumentando la pendenza:
 - La portata non aumenta: $Q = Q_{max}$
 - Il profilo F2 varia perché diminuisce Y_u



- ▶ Riconoscimento preventivo del tipo di alveo
 - Intersezione curve $Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$, $Q = \chi \Omega \sqrt{\Re i_f}$
 - $\hat{Y} \gtrless Y_c \longrightarrow i_f \lesseqgtr i_c$
 - $Y_u(Q_{max}) \gtrless Y_c \longrightarrow i_f \lesseqgtr i_c$

Preso da un serbatoio

► Alveo corto a debole pendenza ($i_f < i_c$)

- Necessarie iterazioni successive

– Iterazione 1

- Schema di alveo indefinito (blu)

- Sistema (grafico o numerico) fra

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E_0 - Y)}$$

$$Q(Y) = \chi \Omega \sqrt{\Re i_f} \quad \longrightarrow \quad Q_0, Y_{u0}$$

- Tracciamento profilo D2

- Verifica Y_{i1} imbocco canale

- $|Y_{i1} - Y_{u0}| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \text{soluzione ok}$

- $|Y_{i1} - Y_{u0}| > \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \text{Iterare}$

– Iterazioni successive (k-esima)

- $Q_k = \Omega_{k-1} \sqrt{2g(E_0 - Y_{i_{k-1}})}$

- Tracciamento profilo D2 \longrightarrow Verifica $|Y_{i_k} - Y_{i_{k-1}}| \longrightarrow$ convergenza o prosecuzione iterazioni

